Algorytmy Równoległe i Rozproszone
Część IX - Rozproszone algorytmy probabilistyczne.

Łukasz Kuszner
pokój 209, WETI
http://www.sphere.pl/~kuszner/
kuszner@sphere.pl

Oficjalna strona wykładu
http://www.sphere.pl/~kuszner/ARiR/
Wykład 15 godzin, Projekt 15 godzin

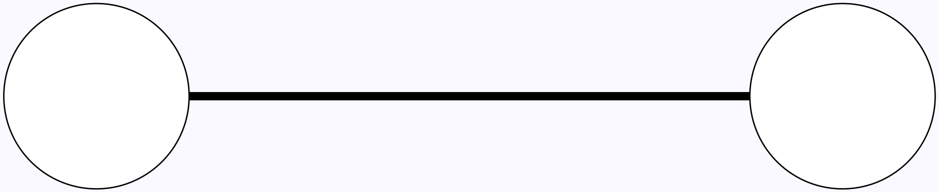
2007/08

1. Rozproszone algorytmy probabilistyczne.

Prezentowane do tej pory algorytmy nie zawierały instrukcji generujących liczby losowe lub pseudolosowe, dlatego nazywamy je deterministycznymi.
Rozproszonych algorytmów niedeterministycznych można używać do łamania symetrii. Istnieje również nieudowodniona hipoteza mówiąca, że korzystając z elementów losowości można konstruować efektywne algorytmy prościej.

2. Przykład

Rozpatrzmy graf jak na rysunku, w którym każdy wierzchołek v ma jedną zmienną lokalną f, inicjalnie $f(v) = 0$.



Zmienna f może przyjmować dwie wartości 0 i 1. Celem jest doprowadzenie do sytuacji, w której oba wierzchołki mają różne wartości.

Algorytm 1: color

R1: **if**

$$\exists_{u \in N(v)} f(u) = f(v)$$

then f(v)=random(2)

Rozpatrzmy działanie tego algorytmu w modelu synchronicznym. Jeśli mamy „pecha”, to wykonanie tego algorytmu może trwać dowolnie długo.

3. Złożoność algorytmów losowych

Nie można więc brać miary złożoności algorytmu jako czasu działania w najgorszym przypadku.
Zwykle przyjmujemy następującą definicję:

Definicja 1 *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie algorytmem probabilistycznym, a* n *rozmiarem problemu. Mówimy, że* $\mathcal{A}$ *jest* $O(f(n))$*, jeśli istnieje stała* $c > 0$ *i* $q \in (0..1)$ *oraz prawdopodobieństwo, że czas działania* $\mathcal{A}$ *przekroczy* $cf(n) + t$ *jest mniejsze niż* q^t*, dokładniej:*

$$Pr[T_{\mathcal{A}}(n) > cf(n) + t] \leqslant q^t. \tag{1}$$

Lub w trochę słabszej wersji

Definicja 2 *Mówimy, że* $\mathcal{A}$ *jest* $O(f(n))$*, jeśli istnieje stała* $c > 0$ *i* $q(n) \in (0..1)$ *takie, że* $1/(1-q(n))$ *jest* $O(f(n))$ *oraz prawdopodobieństwo, że czas działania* $\mathcal{A}$ *przekroczy* $cf(n)+t$ *jest mniejsze niż* $q(n)^t$*, dokładniej:*

$$Pr[T_{\mathcal{A}}(n) > cf(n) + t] \leqslant q(n)^t. \tag{2}$$

Zauważmy, że jeśli $\mathcal{A}$ jest $O(F(n))$, to również wartość oczekiwana $\mathbb{E}[T_{\mathcal{A}}(n)]$ jest $O(F(n))$.

Niech

$$T(n) = a(n) + T(h(n)), \tag{3}$$

gdzie:

$$a(n) \geqslant 0 \tag{4}$$

$$h(n) \in [0, n] \tag{5}$$

$$0 \leqslant \mathbb{E}[h(n)] \leqslant m(n) \leqslant n \tag{6}$$

$$m(n), m(n)/n \text{ są niemalejące.} \tag{7}$$

Niech $u(n)$ będzie nieujemnym rozwiązaniem

$$x(n) = a(n) + x(m(n)) \tag{8}$$

W zależności od $a(n)$ mamy dwie nierówności (Karp 1994).

Twierdzenie 1 *Jeśli* $a(n) = 0$ *dla* $n < d$ *i* $a(n) = 1$ *dla* $n \geqslant d$ *i* $c_t = \min\{x|u(x) \geqslant t\}$, *to*

$$Pr[T(n) > u(n) + n] \leqslant \left(\frac{m(n)}{n}\right)^{n-1} \frac{m(n)}{c_u(n)} \tag{9}$$

Twierdzenie 2 *Jeśli* $a(n)$ *jest ściśle rosnąca, to*

$$Pr[T(n) > u(n) + na(n)] \leqslant \left(\frac{m(n)}{n}\right)^{n} \tag{10}$$

4. Przykład – kolorowanie grafów

Każdy wierzchołek u przechowuje paletę barw nie przypisanych jeszcze przez żadnego z sąsiadów — inicjalnie rozmiaru $\deg(u)+1$. Każdy wierzchołek losuje kolor ze swojej palety i wysyła komunikat do swoich sąsiadów. Jeśli żaden z nich nie wybrał tej barwy, u jest pokolorowany i informuje o tym swoich sąsiadów. Jeśli jakiś sąsiad wylosował taki sam kolor, u nie zatrzymuje go. Na początku następnej rundy u usuwa ze swojej palety kolory użyte przez jego sąsiadów.

Johansson (1992) wykazał, że w tym algorytmie każdy wierzchołek w każdej rundzie otrzyma kolor z prawdopodobieństwem $p \geqslant 1/4$.
Wstawiając $a(n) = 1$, $m(n) = 3n/4$ otrzymamy:

$$\Pr\left\{T(n) \geqslant \left\lfloor \log_{4/3} n \right\rfloor + t + 1\right\} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{t-1} \tag{11}$$