

Algorytmy Równoległe i Rozproszone

Część I - Wprowadzenie

Część II - Sieci porównujące

Łukasz Kuszner
pokój 209, WETI

<http://www.sphere.pl/~kuszner/>
kuszner@sphere.pl

Oficjalna strona wykładu
<http://www.sphere.pl/~kuszner/ARiR/>

Wykład 30 godzin, Ćwiczenia 15 godzin

2005/06

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 1 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

1. Zaliczenie

Na zaliczenie przedmiotu składają się następujące elementy:

- C - suma punktów uzyskanych na ćwiczeniach,

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca
Strona główna
Strona tytułowa
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 2 z 32
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

1. Zaliczenie

Na zaliczenie przedmiotu składają się następujące elementy:

- C - suma punktów uzyskanych na ćwiczeniach,
- K_1, K_2 - sumy punktów uzyskane z dwóch kolokwii, które odbędą się w trakcie trwania semestru.

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca
Strona główna
Strona tytułowa
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 2 z 32
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

1. Zaliczenie

Na zaliczenie przedmiotu składają się następujące elementy:

- C - suma punktów uzyskanych na ćwiczeniach,
- K_1, K_2 - sumy punktów uzyskane z dwóch kolokwiów, które odbędą się w trakcie trwania semestru.
- E - suma punktów uzyskanych z egzaminu

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca
Strona główna
Strona tytułowa
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 2 z 32
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

1. Zaliczenie

Na zaliczenie przedmiotu składają się następujące elementy:

- C - suma punktów uzyskanych na ćwiczeniach,
- K_1, K_2 - sumy punktów uzyskane z dwóch kolokwiów, które odbędą się w trakcie trwania semestru.
- E - suma punktów uzyskanych z egzaminu
- D - suma punktów dodatkowych

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca
Strona główna
Strona tytułowa
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 2 z 32
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Końcowy wynik S obliczamy według wzoru:

$$S = \left(\frac{C + D + \max\{K_1 + K_2, E\}}{400} \right) \cdot 100\%$$

Ocenę z przedmiotu wyznaczamy w zależności od S w następujący sposób:

ocena	wynik
2	$\max\{K_1 + K_2, E\} < 100 \vee C < 100$
3	$S \geq 50\% \wedge S < 60\%$
3+	$S \geq 60\% \wedge S < 70\%$
4	$S \geq 70\% \wedge S < 80\%$
4+	$S \geq 80\% \wedge S < 90\%$
5	$S \geq 90\% \wedge S < 100\%$
5+	$S \geq 100\%$

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 3 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

2. Ogólny plan wykładu

- Wstęp

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 4 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

2. Ogólny plan wykładu

- Wstęp
- Sieci porównujące,

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 4 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

2. Ogólny plan wykładu

- Wstęp
- Sieci porównujące,
- Układy kombinacyjne,

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 4 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

2. Ogólny plan wykładu

- Wstęp
- Sieci porównujące,
- Układy kombinacyjne,
- Algorytmy w modelu PRAM,

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 4 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

2. Ogólny plan wykładu

- Wstęp
- Sieci porównujące,
- Układy kombinacyjne,
- Algorytmy w modelu PRAM,
- Algorytmy w modelu rozproszonym.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 4 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

3. Literatura

- T. H. Corman, C. E. Leiserson and R. L. Rivest, „Introduction to Algorithms”, The MIT Press/McGraw-Hill Company, 1990 (wydanie polskie WNT).

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 5 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 5 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

3. Literatura

- T. H. Corman, C. E. Leiserson and R. L. Rivest, „Introduction to Algorithms”, The MIT Press/McGraw-Hill Company, 1990 (wydanie polskie WNT).
- Raymond Greenlaw, H. James Hoover, Walter L. Ruzzo „Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory”, Oxford University Press, 1998.

3. Literatura

- T. H. Corman, C. E. Leiserson and R. L. Rivest, „Introduction to Algorithms”, The MIT Press/McGraw-Hill Company, 1990 (wydanie polskie WNT).
- Raymond Greenlaw, H. James Hoover, Walter L. Ruzzo „Limits to Parallel Computation: P-Completeness Theory”, Oxford University Press, 1998.
- Hagit Attiya „Lecture Notes for Course Distributed Algorithms”, 1994.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 6 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- C. Xavier, S. S. Iyengar, „Introduction to Parallel Algorithms”, Wiley-IEEE, 1998.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 6 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- C. Xavier, S. S. Iyengar, „Introduction to Parallel Algorithms”, Wiley-IEEE, 1998.
- Gerard Tel, „Introduction to Distributed Algorithms”, Cambridge University Press, 2nd edition, 2000.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 6 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- C. Xavier, S. S. Iyengar, „Introduction to Parallel Algorithms”, Wiley-IEEE, 1998.
- Gerard Tel, „Introduction to Distributed Algorithms”, Cambridge University Press, 2nd edition, 2000.
- Shlomi Dolev. Self-Stabilization. MIT Press, 2000.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 7 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- J. Jaja, „An Introduction to Parallel Algorithms”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 7 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- J. Jaja, „An Introduction to Parallel Algorithms”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- S.G. Akl, „The Design and Analysis of Parallel Algorithms”, Prentice-Hall, 1989.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 7 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- J. Jaja, „An Introduction to Parallel Algorithms”, Addison-Wesley, Reading, MA, 1992.
- S.G. Akl, „The Design and Analysis of Parallel Algorithms”, Prentice-Hall, 1989.
- Lecture Notes Repository: [Uniwersytet w Paderborn](#).

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 8 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- Ananth Grama, Anshul Gupta, George Karypis, Vipin Kumar „Introduction to Parallel Computing”, Addison Wesley, 2003.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 8 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

- Ananth Grama, Anshul Gupta, George Karypis, Vipin Kumar „Introduction to Parallel Computing”, Addison Wesley, 2003.
- Hagit Attiya, Jennifer Welch „Distributed Computing: Fundamentals, Simulations, and Advanced Topics”, 2nd Edition.

- Ananth Grama, Anshul Gupta, George Karypis, Vipin Kumar „Introduction to Parallel Computing”, Addison Wesley, 2003.
- Hagit Attiya, Jennifer Welch „Distributed Computing: Fundamentals, Simulations, and Advanced Topics”, 2nd Edition.
- Guy E. Blelloch, Bruce M. Maggs: Parallel Algorithms. The Computer Science and Engineering Handbook, 1997: 277-315.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 9 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

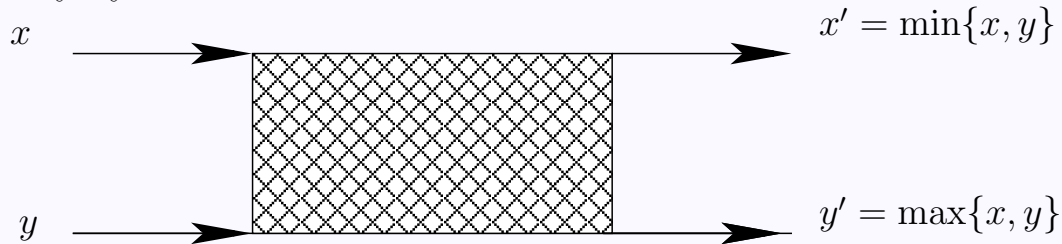
Koniec

4. Sieci porównujące - przykład

Sieć porównująca składa się z połączonych ze sobą komparatorów.

4.1. Schematy komparatora

zwykły:



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 10 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

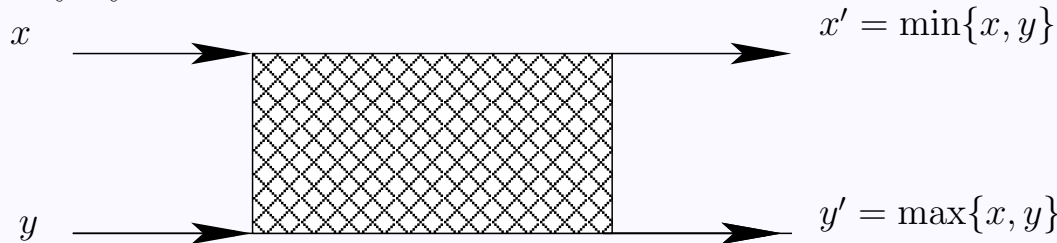
Koniec

4. Sieci porównujące - przykład

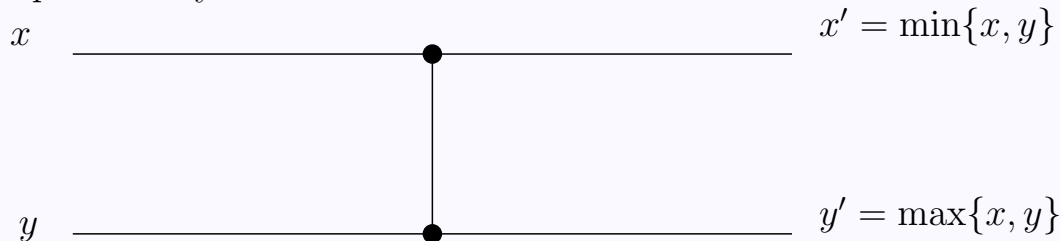
Sieć porównująca składa się z połączonych ze sobą komparatorów.

4.1. Schematy komparatora

zwykły:



uproszczony:



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 10 z 32

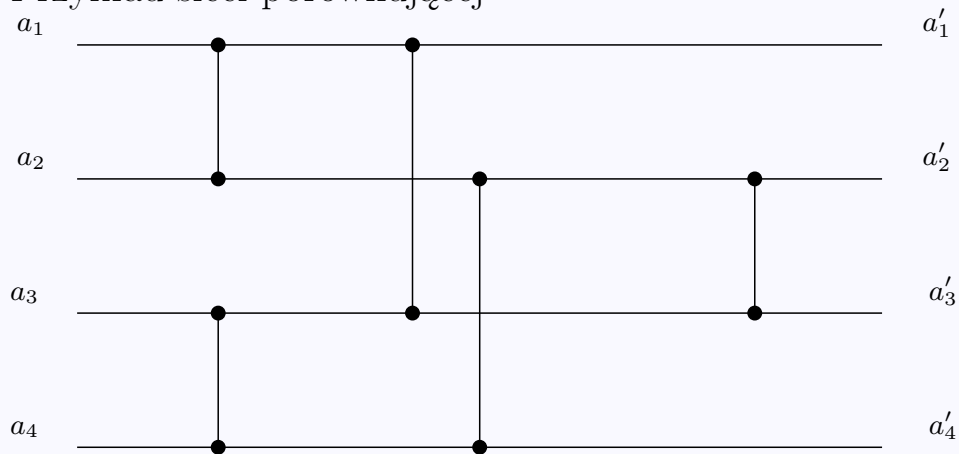
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Przykład sieci porównującej



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 11 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Ćwiczenie 1

Sprawdź, że sieć porównująca z poprzedniego slajdu jest siecią sortującą.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 12 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

5. PRAM - przykład

5.1. Iloczyn skalarny

We: Tablice współrzędnych $a[1 : n]$ i $b[1 : n]$

Wy: Liczba będąca iloczynem skalarnym wektorów a i b .

Algorytm 1: Iloczyn skalarny

```
1: for  $i = 1$  to  $n$  do in parallel
2:    $c_i = a_i * b_i$ 
3: end for
4:  $p = n/2$ 
5: while  $p > 0$  do
6:   for  $i = 1$  to  $p$  do in parallel
7:      $c_i = c_i + c_{i+p}$ 
8:   end for
9:    $p = p/2$ 
10: end while
```

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 13 z 32

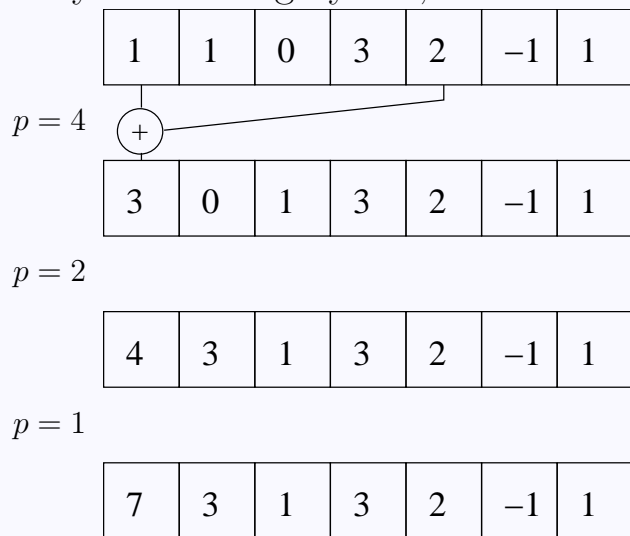
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Przykład dla algorytmu, dla $n = 7$.



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 14 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

6. Model rozproszony - przykład

6.1. Rozproszony algorytm dla problemu: „wybór lidera”

Przypuśćmy, że mamy rozproszony system asynchroniczny, w którym jednostki obliczeniowe tworzą pierścień.

Problem polega na skonstruowaniu algorytmu, który pozwoli wyróżnić jeden z procesorów. Oczekujemy, że po zakończeniu działania algorytmu dokładnie jeden procesor zasygnalizuje „jestem liderem”, a wszystkie pozostałe „nie jestem liderem”.

Przypuśćmy, że każdy z procesorów ma unikalny identyfikator. Procesory tworzą pierścień, możemy więc mówić o lewym i prawym sąsiedzie. Inicjalnie każdy z procesorów wysyła wiadomość do swojego lewego sąsiada, w której zapisuje swój identyfikator. Następnie każdy procesor odbierając wiadomość od prawego sąsiada przesyła ją dalej, jeśli zapisany na niej identyfikator jest większy od jego własnego identyfikatora i kasuje, jeśli jest mniejszy. Procesor, który otrzymał z powrotem swój własny identyfikator ogłasza się liderem i wysyła wiadomość kończącą działanie algorytmu.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 16 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że liczba wiadomości wysłanych w trakcie działania algorytmu jest $O(n^2)$.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 17 z 32

Powrót

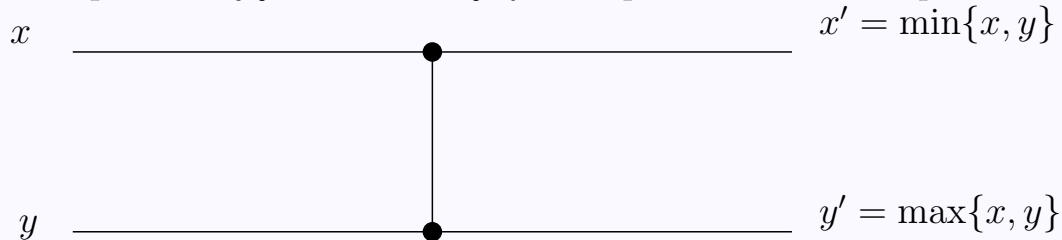
Full Screen

Zamknij

Koniec

7. Sieci porównujące

Sieć porównująca składa się tylko z przewodów i komparatorów.



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 18 z 32

Powrót

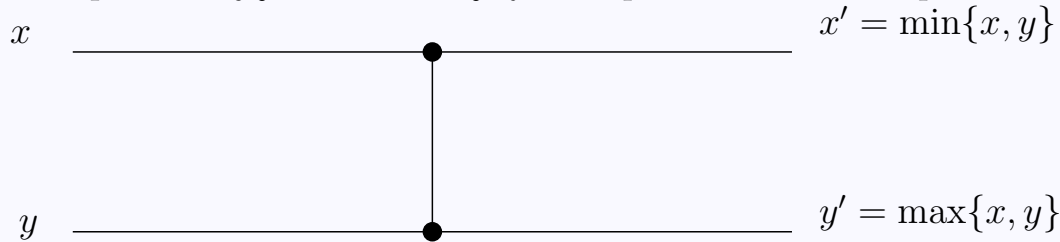
Full Screen

Zamknij

Koniec

7. Sieci porównujące

Sieć porównująca składa się tylko z przewodów i komparatorów.



Zakładamy, że komparator działa w czasie $O(1)$, to znaczy czas pomiędzy pojawieniem się danych na wejściu (na rysunku po lewej stronie), a pojawieniem się wyników na wyjściu (na rysunku po prawej stronie) jest stały. Przyjmujemy, że sieć ma n wejść a_1, a_2, \dots, a_n i n wyjść b_1, b_2, \dots, b_n , a graf sieci jest acykliczny.

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 18 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

7.1. Głębokość sieci

Wejście sieci ma głębokość 0. Jeśli wejścia komparatora mają głębokość d_x i d_y , to wyjście ma głębokość $\max(d_x, d_y) + 1$.

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 19 z 32

Powrót

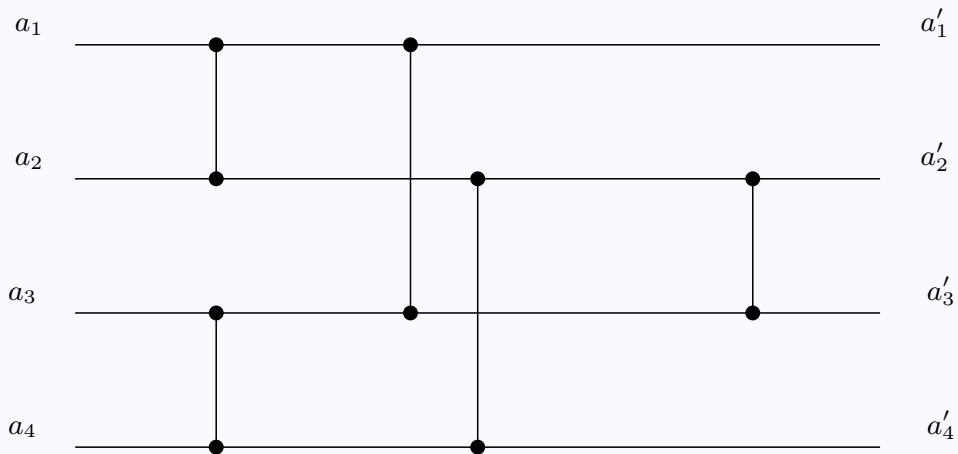
Full Screen

Zamknij

Koniec

7.1. Głębokość sieci

Wejście sieci ma głębokość 0. Jeśli wejścia komparatora mają głębokość d_x i d_y , to wyjście ma głębokość $\max(d_x, d_y) + 1$. *Głębokość sieci* definiujemy jako największą głębokość wyjścia. Głębokość identyfikujemy z czasem potrzebnym na posortowanie wszystkich elementów.



- Zaliczenie
- Plan wykładu
- Literatura
- Sieci porównujące
- PRAM - przykład
- Model rozproszony
- Sieci porównujące
- Zasada zero-jedynkowa
- Sieci bitoniczne
- Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

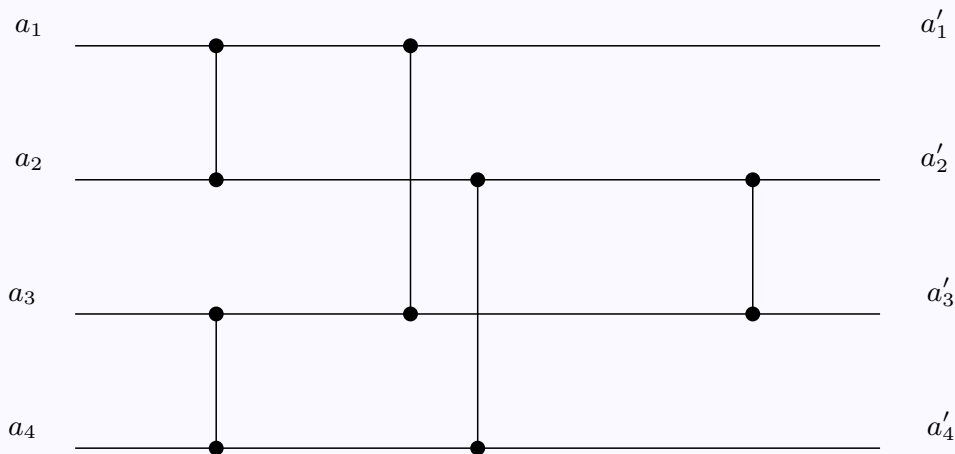
Strona 20 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec



poniższa sieć porównująca ma głębokość 3.

7.2. Sieci sortujące

Sieć sortująca, to sieć porównująca, której ciąg wyjściowy jest niemalejący dla każdego ciągu wejściowego.

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀ ▶

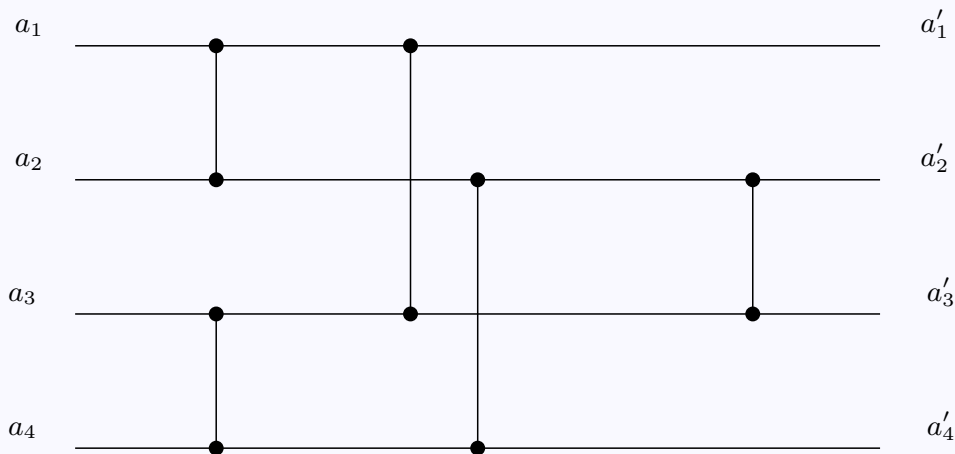
Strona 20 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec



poniższa sieć porównująca ma głębokość 3.

7.2. Sieci sortujące

Sieć sortująca, to sieć porównująca, której ciąg wyjściowy jest niemalejący dla każdego ciągu wejściowego.

Ćwiczenie 3

Wykaż, że sieć sortująca o n wejściach ma głębokość co najmniej $\lg n$.

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 20 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

8. Zasada zero-jedynkowa

Lemat 1 *Jeśli sieć porównująca dla ciągu wejściowego $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ wyznacza ciąg wyjściowy $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to dla dowolnej funkcji niemalejącej ta sama sieć z ciągiem wejściowym $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ wyznacza ciąg wyjściowy $f(b) = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.*

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 21 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

8. Zasada zero-jedynkowa

Lemat 1 *Jeśli sieć porównująca dla ciągu wejściowego $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ wyznacza ciąg wyjściowy $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to dla dowolnej funkcji niemalejącej ta sama sieć z ciągiem wejściowym $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ wyznacza ciąg wyjściowy $f(b) = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.*

Ćwiczenie 4

Przeprowadź pełny dowód lematu 1.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 21 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

8. Zasada zero-jedynkowa

Lemat 1 Jeśli sieć porównująca dla ciągu wejściowego $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ wyznacza ciąg wyjściowy $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to dla dowolnej funkcji niemalejącej ta sama sieć z ciągiem wejściowym $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ wyznacza ciąg wyjściowy $f(b) = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.

Ćwiczenie 4

Przeprowadź pełny dowód lematu 1.

Wskazówka 1: Rozważ pojedynczy komparator. Z monotoniczności f wynika, że $\max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\})$ i $\min\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\})$

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀

▶

◀

▶

Strona 21 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

8. Zasada zero-jedynkowa

Lemat 1 *Jeśli sieć porównująca dla ciągu wejściowego $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ wyznacza ciąg wyjściowy $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to dla dowolnej funkcji niemalejącej ta sama sieć z ciągiem wejściowym $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ wyznacza ciąg wyjściowy $f(b) = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.*

Ćwiczenie 4

Przeprowadź pełny dowód lematu 1.

Wskazówka 1: Rozważ pojedynczy komparator. Z monotoniczności f wynika, że $\max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\})$ i $\min\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\})$

Wskazówka 2: Zastosuj indukcję na głębokość sieci.

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 21 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

8. Zasada zero-jedynkowa

Lemat 1 *Jeśli sieć porównująca dla ciągu wejściowego $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ wyznacza ciąg wyjściowy $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, to dla dowolnej funkcji niemalejącej ta sama sieć z ciągiem wejściowym $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$ wyznacza ciąg wyjściowy $f(b) = (f(b_1), f(b_2), \dots, f(b_n))$.*

Ćwiczenie 4

Przeprowadź pełny dowód lematu 1.

Wskazówka 1: Rozważ pojedynczy komparator. Z monotoniczności f wynika, że $\max\{f(x), f(y)\} = f(\max\{x, y\})$ i $\min\{f(x), f(y)\} = f(\min\{x, y\})$

Wskazówka 2: Zastosuj indukcję na głębokość sieci.

Wskazówka 3: zob. Cormen str. 718

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 21 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Twierdzenie 2 *Jeśli sieć porównująca o n wejściach sortuje poprawnie wszystkie 2^n ciągi zer i jedynek, to sortuje poprawnie dowolne ciągi liczb.*

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 22 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Twierdzenie 2 *Jeśli sieć porównująca o n wejściach sortuje poprawnie wszystkie 2^n ciągi zer i jedynek, to sortuje poprawnie dowolne ciągi liczb.*

Dowód: Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że sieć sortuje poprawnie wszystkie ciągi zer i jedynek, ale istnieje ciąg liczb $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, dla którego wynik nie jest posortowany poprawnie. Istnieją elementy a_i, a_j takie, że $a_i < a_j$ oraz w ciągu wyjściowym a_j występuje przed a_i .

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀◀

▶▶

◀

▶

Strona 22 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Twierdzenie 2 *Jeśli sieć porównująca o n wejściach sortuje poprawnie wszystkie 2^n ciągi zer i jedynek, to sortuje poprawnie dowolne ciągi liczb.*

Dowód: Dowód nie wprost. Przypuśćmy, że sieć sortuje poprawnie wszystkie ciągi zer i jedynek, ale istnieje ciąg liczb $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, dla którego wynik nie jest posortowany poprawnie. Istnieją elementy a_i, a_j takie, że $a_i < a_j$ oraz w ciągu wyjściowym a_j występuje przed a_i . Niech $f(x) = 0$, jeśli $x \leq a_i$ i $f(x) = 1$, jeśli $x > a_i$. Funkcja f jest niemalejąca. Z lematu 1 wnioskujemy, że jeśli na wejściu znajduje się ciąg $f(a) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$, to na wyjściu wartość $f(a_j) = 1$ znajduje się przed $f(a_i) = 0$, sprzeczność z założeniem o poprawnym sortowaniu ciągów zero-jedynkowych. \square

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 22 z 32

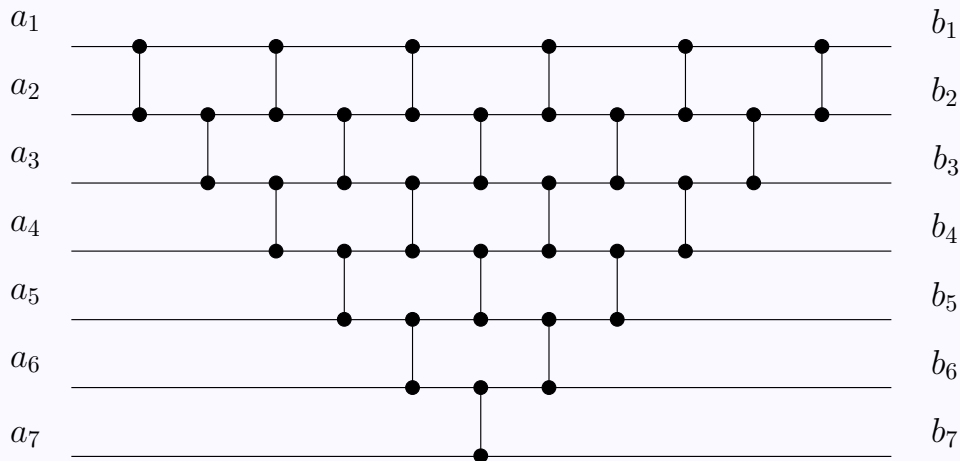
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Rodzina sieci opartych na algorytmie sortowania przez wstawianie.



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 23 z 32

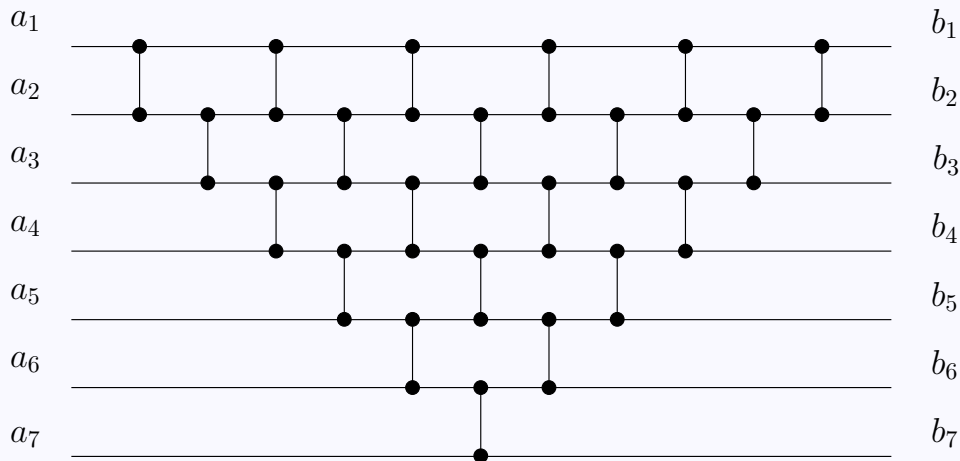
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Rodzina sieci opartych na algorytmie sortowania przez wstawianie.



Ćwiczenie 5

Jaka jest głębokość takiej sieci w zależności od liczby wejść?

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 23 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

9. Bitoniczne sieci sortujące

Ciągiem bitonicznym nazywamy ciąg, który można przeciąć na dwie części: pierwszą niemalejącą i drugą nierosnącą lub pierwszą nierosnącą i drugą niemalejącą. Zero-jedynkowe ciągi bitoniczne mają postać $0^i 1^j 0^k$ albo $1^i 0^j 1^k$.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 24 z 32

Powrót

Full Screen

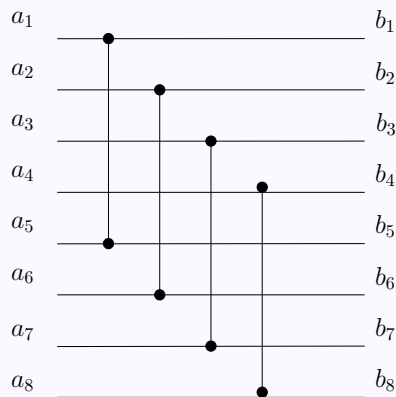
Zamknij

Koniec

9. Bitoniczne sieci sortujące

Ciągiem bitonicznym nazywamy ciąg, który można przeciąć na dwie części: pierwszą niemalejącą i drugą nierosnącą lub pierwszą nierosnącą i drugą niemalejącą. Zero-jedynkowe ciągi bitoniczne mają postać $0^i 1^j 0^k$ albo $1^i 0^j 1^k$.

Elementem łączącym (Half-Cleaner[n]), dla n parzystych nazywamy sieć porównującą o głębokości 1 złożoną z $n/2$ komparatorów, z których każdy łączy wejście o numerze i z wejściem $i + n/2$, dla $i = 1, 2, \dots, n/2$.



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 24 z 32

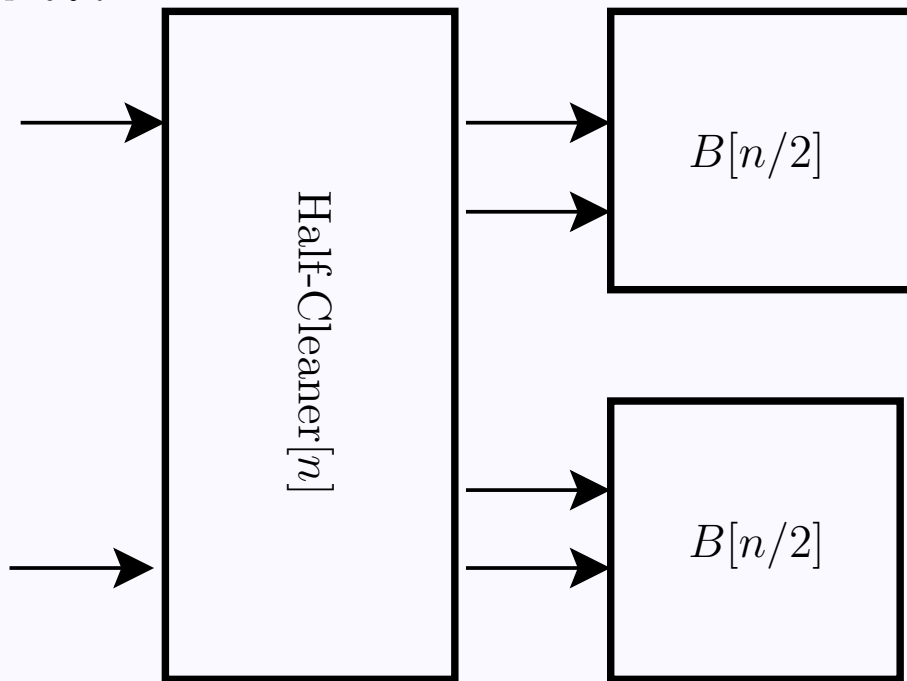
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Sieć sortującą ciągi bitoniczne $B[n]$ budujemy w następujący sposób. Dla $n = 1$ sieć jest pusta, dla $n = 2$ sieć składa się z jednego komparatora, natomiast dla $n > 2$ sieć wygląda w sposób następujący:



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 25 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Ćwiczenie 6

Narysuj sieć B[8].

Ćwiczenie 7

Jak skonstruować sieć bitoniczną, gdy n nie jest potęgą 2?

Ćwiczenie 8

Uzasadnij, że jeśli każdy element jednego z dwóch zero-jedynkowych ciągów bitonicznych jest nie większy niż każdy element drugiego ciągu, to jeden z ciągów składa się z samych 0, albo z samych 1.

Ćwiczenie 9

Przeczytaj ze zrozumieniem pełen dowód poprawności działania sieci $B[n]$, (Cormen str. 721) i odtwórz go nie zaglądając do książki.

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 26 z 32

Powrót

Full Screen

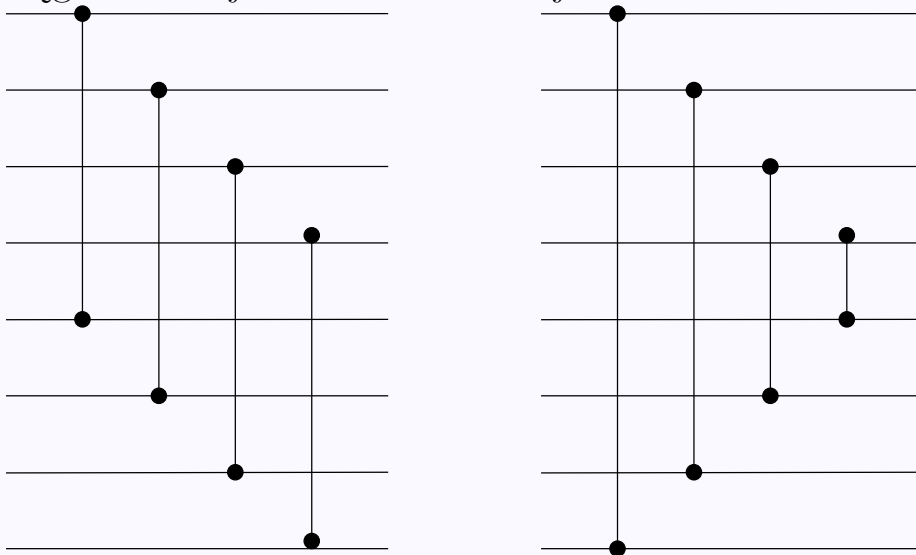
Zamknij

Koniec

10. Sieć sortująca o głębokości $\log^2 n$

Pokażemy teraz jak skonstruować sieć opartą na algorytmie **mergesort**. Do tego celu użyjemy pokazanych wcześniej sieci bitonicznych i sieci scalających. Konstrukcja sieci scalającej dwa posortowane ciągi w jeden opiera się na prostej obserwacji: jeśli w jednym z dwóch posortowanych ciągów odwrócimy porządek, to otrzymamy ciąg bitoniczny, a ciągi bitoniczne umiemy już sortować.

Poniższy rysunek przedstawia jak odwrócić porządek jednego z ciągów na wejściu sieci bitoniczej.



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa

◀▶

◀▶

Strona 28 z 32

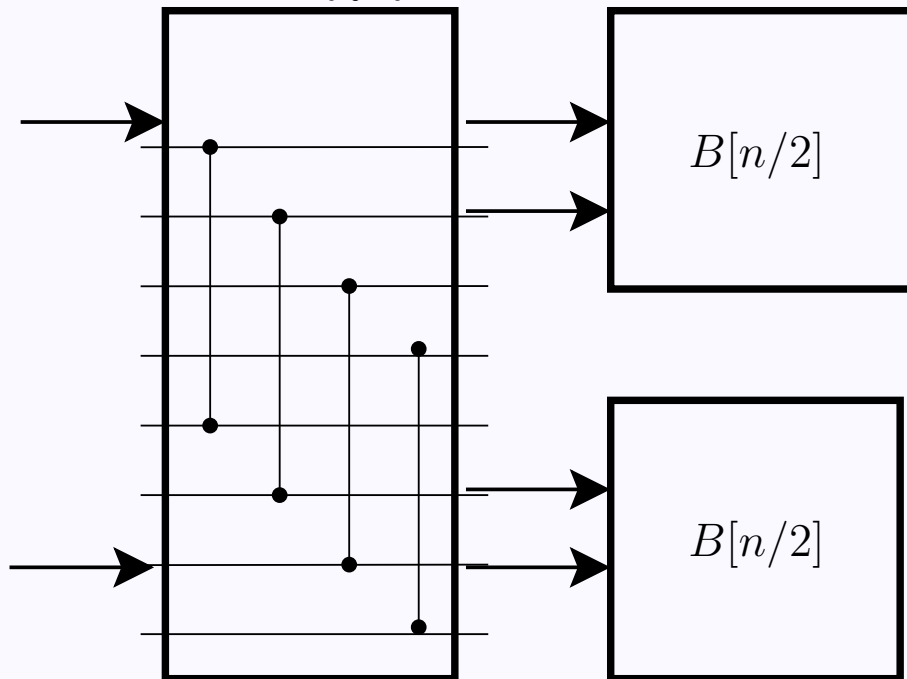
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Schemat sieci scalającej MERGER [n]



- Zaliczenie
- Plan wykładu
- Literatura
- Sieci porównujące
- PRAM - przykład
- Model rozproszony
- Sieci porównujące
- Zasada zero-jedynkowa
- Sieci bitoniczne
- Sieć sortująca**

Strona główna

Strona tytułowa

◀ ▶

◀ ▶

Strona 29 z 32

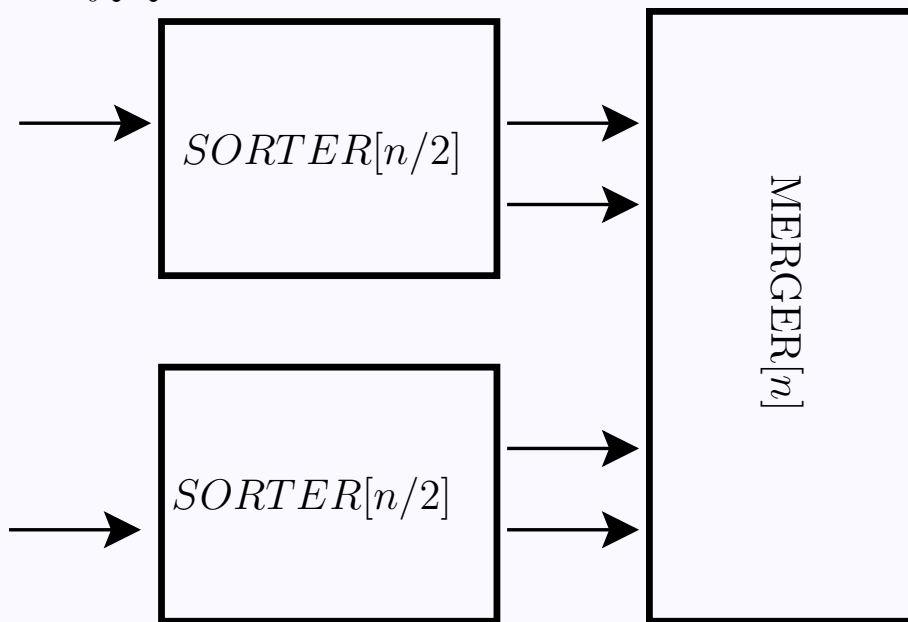
Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Mając już wszystkie potrzebne elementy możemy zbudować sieć sortującą $SORTER[n]$



Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 30 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

Zaliczenie
Plan wykładu
Literatura
Sieci porównujące
PRAM - przykład
Model rozproszony
Sieci porównujące
Zasada zero-jedynkowa
Sieci bitoniczne
Sieć sortująca

Ćwiczenie 10

Narysuj sieć **SORTER**[8].

Ćwiczenie 11

Wykaż, że głębokość sieci **SORTER**[n] jest $\Theta(\log^2(n))$.

Ćwiczenie 12

Wykaż, że głębokość sieci **SORTER**[n] jest równa $\lg n(\lg n + 1)/2$.

[Strona główna](#)

[Strona tytułowa](#)

[◀◀](#) [▶▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Strona 31 z 32

[Powrót](#)

[Full Screen](#)

[Zamknij](#)

[Koniec](#)

Zaliczenie

Plan wykładu

Literatura

Sieci porównujące

PRAM - przykład

Model rozproszony

Sieci porównujące

Zasada zero-jedynkowa

Sieci bitoniczne

Sieć sortująca

Strona główna

Strona tytułowa



Strona 32 z 32

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec