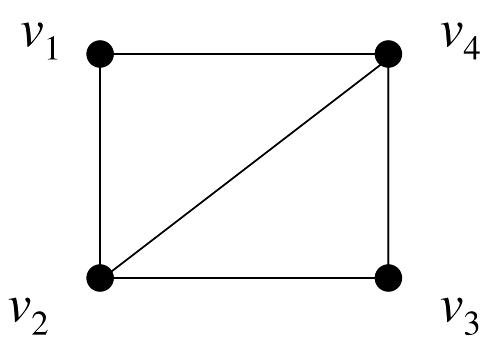
Pojęcie grafu

Def. *Graf* prosty G=(V,E) jest uporządkowaną parą dwóch elementów: zbioru wierzchołków V oraz zbioru krawędzi $E \subset V \times V$. Krawędź pomiędzy wierzchołkami u oraz v oznaczamy $\{u,v\}$. Graf prosty nie zawiera krawędzi postaci $\{u,u\}$ oraz pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje co najwyżej jedna krawędź.

Def. Wierzchołki u i v są *sąsiednie*, gdy $\{u,v\} \in E(G)$. Wierzchołek u oraz krawędź e są *incydentne*, gdy $u \in e$.

Przykład:



$$G = (\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \},$$
$$\{ \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_1\}, \{v_2, v_4\} \})$$

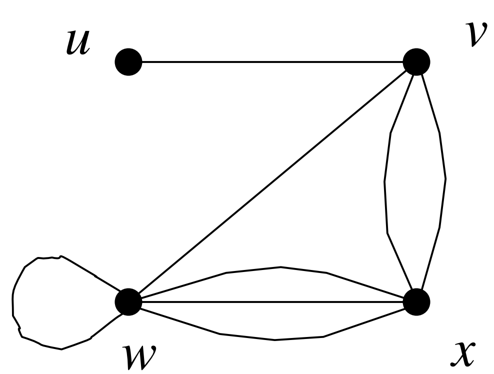
Uwaga. Rysunek grafu jest reprezentacją zbioru wierzchołków oraz sposobu ich połączenia, więc jego własności metryczne nie są istotne.

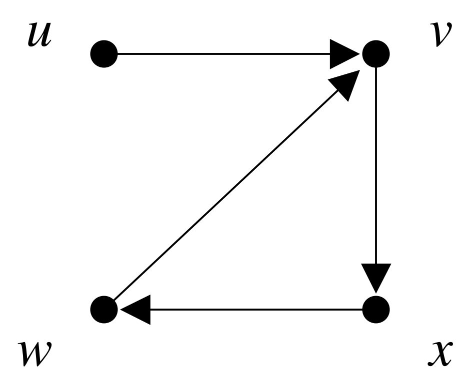
Multigrafy oraz grafy skierowane

Def. *Multigraf* to graf, w którym pomiędzy dowolną parą wierzchołków może wystąpić więcej niż jedna krawędź oraz dopuszczalne są *pętle*, tzn. krawędzie postaci $\{v,v\}$, gdzie $v \in V(G)$.

Def. Graf nazywamy *digrafem* (*grafem skierowanym*), gdy krawędź łącząca u oraz v jest uporządkowaną parą postaci (u,v).

Przykład:





$G = (\{u, v, w, x\},$
$\{\{u,v\}, \{w,v\}, \{w,w\}, \{w,x\},$
$\{w,x\}, \{w,x\}, \{x,v\}, \{x,v\}\})$

$D = (\{u, v, w, x\},$
$\{(u,v), (w,v), (v,x), (x,w)\})$

Stopień wierzchołka

Def. *Stopień* wierzchołka v jest oznaczany symbolem deg(v) i jest to ilość wierzchołków sąsiednich z v. Dla danego grafu G definiujemy parametry:

$$\delta = \min \{ \deg(v) : v \in V(G) \}$$
$$\Delta = \max \{ \deg(v) : v \in V(G) \}$$

Lemat o uściskach dłoni. *Niech G będzie grafem prostym. Wówczas*

$$\deg(v_1) + \ldots + \deg(v_n) = 2m.$$

Dowód: (indukcja ze względu na liczbę krawędzi grafu)

1. Jeśli $m = 0$, to równość jest prawdziwa.
2. Zakładamy, że lemat zachodzi dla pewnego $m \geq 0$.
3. Udowodnimy równanie dla $m + 1$. Niech $e \in E(G)$ będzie dowolną krawędzią. Z założenia indukcyjnego wiadomo, że
$$\deg(v_1) + \ldots + \deg(v_n) = 2m(G - e),$$
gdzie deg(v_i) jest stopniem v_i w grafie $G - e$. Dla grafu G suma stopni wierzchołków jest o 2 większa niż dla $G - e$ oraz $m(G) = m(G - e) + 1$, co oznacza, że równanie zachodzi dla grafu G o $m + 1$ krawędziach.

Twierdzenie Havla

Tw. *Ilość wierzchołków nieparzystego stopnia w grafie prostym jest parzysta.*
Dowód: Z lematu o uściskach dłoni wiadomo, że

$$\deg(v_1) + ... + \deg(v_k) + \deg(u_1) + ... + \deg(u_l) = 2m,$$

gdzie v_i jest wierzchołkiem o nieparzystym stopni, natomiast u_i – parzystym. Wiadomo, że suma liczb parzystych $\deg(u_1) + ... + \deg(u_l)$ jest liczbą parzystą, więc suma $\deg(v_1) + ... + \deg(v_k)$ ma również parzystą wartość, co jest spełnione tylko wtedy, gdy ilość składników jest parzysta (k jest parzyste).

Def. *Ciągiem stopniowym* grafu nazywamy uporządkowany nierosnąco ciąg stopni jego wierzchołków.

Def. Ciąg stopniowy jest *graficzny*, gdy jest on ciągiem stopni pewnego grafu.

Tw. Havla *Ciąg stopniowy* $(k,d_1,...,d_l)$ *jest graficzny wtedy i tylko wtedy, gdy po posortowaniu* ciąg $(d_1 - 1, d_2 - 1,..., d_k - 1, d_{k+1}, d_{k+2},...,d_l)$ *jest graficzny*.

Ciągi graficzne

Algorytm sprawdzający, czy ciąg stopni jest graficzny:

1. Jeśli $d_1 = ... = d_l = 0$, to ciąg jest graficzny
2. Jeśli $d_1 < 0$, to ciąg nie jest graficzny
3. Uporządkuj ciąg nierosnąco wg stopni
4. Usuń z ciągu pierwszą (największą) liczbę d_1 i odejmij 1 od kolejnych d_1 liczb ciągu
5. Wróć do punktu 1

Przykład: Sprawdzić, czy podany ciąg jest graficzny:

$$(4, 3, 3, 2, 2)$$

$$(2, 2, 1, 1)$$

$$(1, 0, 1) \longrightarrow (1, 1, 0)$$

$$(0, 0)$$

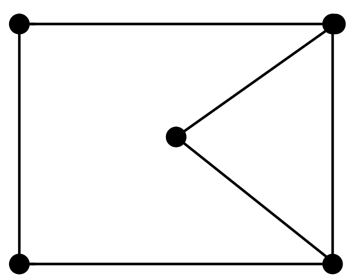
Odpowiedź: podany ciąg stopniowy jest graficzny.

Ciągi graficzne

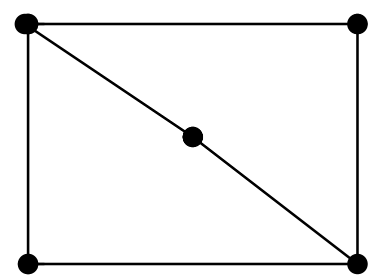
Przykład

- Ciąg (6,5,4,4,3,3,2) nie jest graficzny, ponieważ suma stopni odpowiedniego grafu wynosiłaby 27, co nie jest możliwe na podstawie lematu o uściskach dłoni.
- Ciąg stopni (3,3,2,2,2) jest graficzny, ponieważ jest on ciągiem grafów prostych G_1 i G_2 pokazanych poniżej.

$G_1 =$

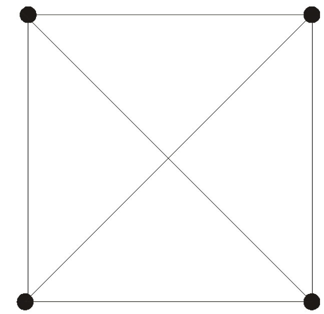


$G_2 =$

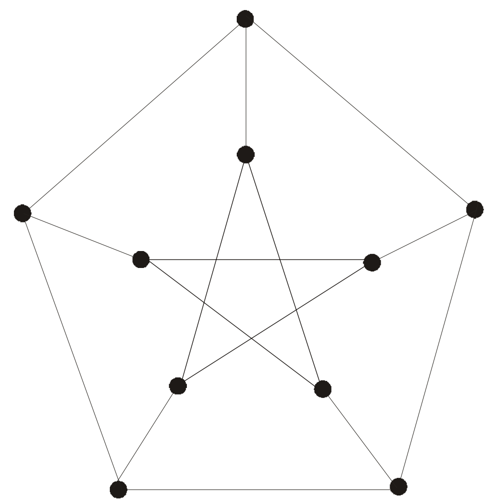


Przykłady grafów

- *Graf pusty* $N_n=(\{v_1,\ldots,v_n\},\varnothing)$.
- *Graf pełny* $K_n=(\{v_1,\ldots,v_n\},\{\{v_i,v_j\}: i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j\})$.
- *Graf r-regularny* jest grafem, dla którego zachodzi równość $r = \delta = \Delta$ (tzn. stopień każdego wierzchołka jest równy r). Wówczas $m=(r\cdot n)/2$. Graf 3-regularny nazywamy *grafem kubicznym*. Zdefiniowany wcześniej graf pełny o n wierzchołkach jest $(n-1)$-regularny.



Graf K_4



Graf kubiczny
(graf Petersena)

Operacje sumy i zespolenia

Def. (suma grafów)

$$G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$$

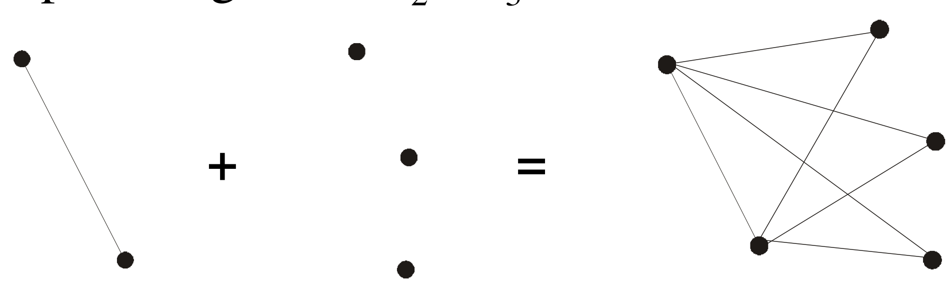
Def. (zespolenie grafów)

$$G_1 + G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{ \{v_1, v_2\} : v_1 \in V(G_1), v_2 \in V(G_2) \})$$

Tw. *Jeśli $G = G_1 + G_2$, to*

$$n(G) = n(G_1) + n(G_2),$$
$$m(G) = m(G_1) + m(G_2) + n(G_1) \cdot n(G_2).$$

Przykład Zespolenie grafów K_2 i N_3



Dopełnienie grafu

Def. Jeśli G jest grafem prostym, to jego dopełnieniem jest graf $\overline{G}$, o tym samym zbiorze wierzchołków oraz dwa wierzchołki są sąsiednie w G' wtedy i tylko wtedy, gdy nie są sąsiednie w G.

Uwaga Przykładowe zależności:

$$\overline{\overline{G}} = G,$$

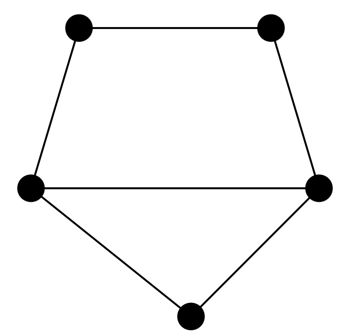
$$\overline{K_n} = N_n,$$

$$\overline{K}_{r,s} = K_r \cup K_s,$$

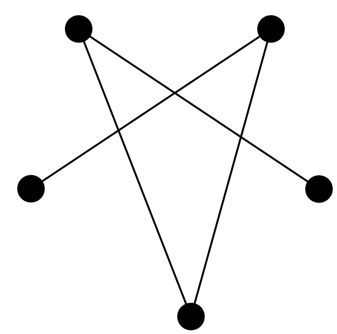
$$\overline{G}_r = G_{n-r-1},$$

gdzie G_r oznacza dowolny graf r–regularny.

$G =$



$\overline{G} =$

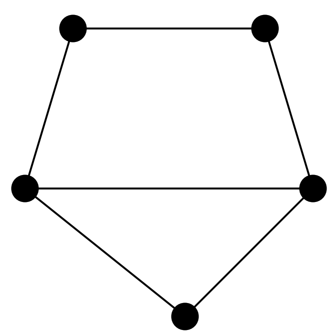


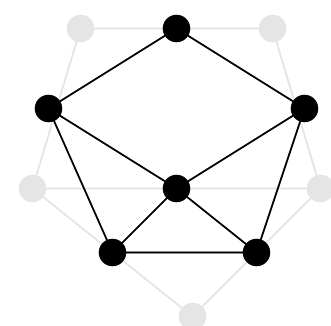
Graf krawędziowy

Def. *Graf krawędziowy* $L(G)$ grafu G to graf, którego wierzchołki odpowiadają krawędziom G. Dwa wierzchołki są sąsiednie w $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im krawędzie są sąsiednie w G.

Uwaga *Jeśli G jest grafem r-regularnym, to $L(G)$ jest $2(r-1)$-regularny.*

Przykład

$G =$ 

$L(G) =$ 

Pojęcie podgrafu

Def. *Podgrafem* grafu G nazywamy dowolny graf H taki, że
$V(H) \subset V(G)$ oraz $E(H) \subset E(G)$.

Uwaga Podgraf można otrzymać usuwając pewną liczbę krawędzi i (lub) wierzchołków z grafu G. Jeśli $e \in E(G)$, to przez $G - e$ rozumiemy podgraf powstały przez usunięcie krawędzi e z grafu G. Jeśli $F \subset E(G)$ to $G - F$ jest grafem utworzonym z G w wyniku usunięcia krawędzi należących do zbioru F. Analogicznie, jeśli v, S są odpowiednio wierzchołkiem oraz zbiorem wierzchołków grafu G, to $G - v$ oraz $G - S$ definiujemy jako grafy powstałe poprzez usunięcie odpowiednio v lub S z grafu G.

Def. Podgraf pełny dowolnego grafu G nazywamy *kliką*. Rozmiar największej kliki oznaczamy przez $\omega(G)$.

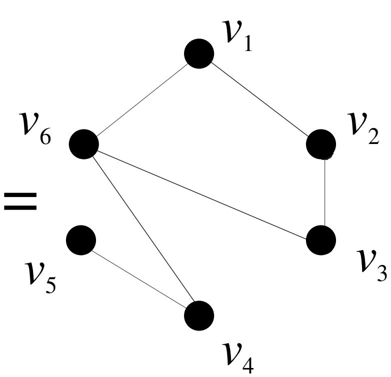
Podgraf indukowany

Def. *Podgraf indukowany* $G[S]$ grafu G, gdzie $S \subset V(G)$, definiujemy następująco:

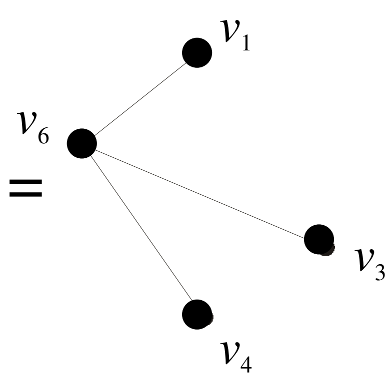
$$G[S] = (S, \{\{u,v\} : u,v\in S,\ \{u,v\}\in E(G)\}).$$

Przykład (podgraf indukowany)

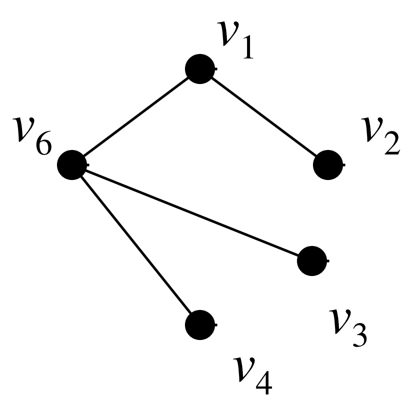
$G =$



$G[\{v_1, v_3, v_4, v_6\}] =$



Podgraf G, który nie jest podgrafem indukowanym:

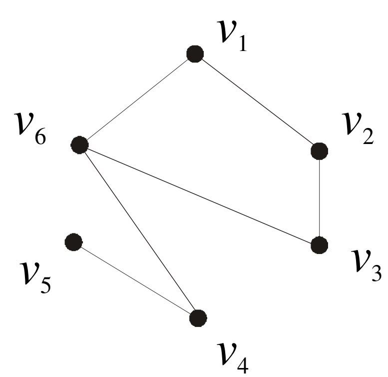


Drogi i cykle

Def.

- *Marszruta* to taki ciąg krawędzi grafu G, że dwie kolejne krawędzie tego ciągu są sąsiednie w G lub są identyczne.
- *Łańcuch* jest marszrutą, w której żadna krawędź nie występuje dwukrotnie.
- *Droga* to marszruta w której każdy wierzchołek występuje co najwyżej raz.
- *Cykl* to droga, której wierzchołek początkowy jest równy końcowemu.

Przykład

$G =$ 

marszruta: $v_1, v_6, v_3, v_6, v_4, v_5$

łańcuch: $v_6, v_1, v_2, v_3, v_6, v_4$

droga: $v_1, v_2, v_3, v_6, v_4, v_5$

cykl: v_1, v_2, v_3, v_6, v_1

Drogi i cykle

Tw. *Jeśli* $\delta = 2$, *to graf G zawiera cykl.*

Dowód:

(a) Mamy $m \geq n$, gdyż z lematu o uściskach dłoni wiadomo, że

$$2m = \deg(v_1) + \ldots + \deg(v_n) \geq n\delta = 2n.$$

(b) Udowodnimy indukcyjnie względem n, że jeśli $m \geq n$, to G zawiera cykl.

- Jeśli $n = 2$, to G zawiera cykl.
- Zakładamy, że twierdzenie zachodzi dla wszystkich grafów, których rząd nie przekracza n.
- Rozważmy $n + 1$ wierzchołkowy graf G oraz niech $e = \{u,v\}$ będzie jego dowolną krawędzią. Jeśli $G - e$ jest spójny, to istnieje ścieżka z u do v w $G - e$ więc ta ścieżka w połączeniu z e tworzy cykl w G. Jeśli $G - e$ nie jest spójny to oznaczmy $G - e = G_1 \cup G_2$. Gdyby zachodziło $m(G_1) \leq n(G_1) - 1$ oraz $m(G_2) \leq n(G_2) - 1$, to

$$m(G) = m(G_1) + m(G_2) + 1 \leq n(G_1) + n(G_2) - 1 = n(G) - 1,$$

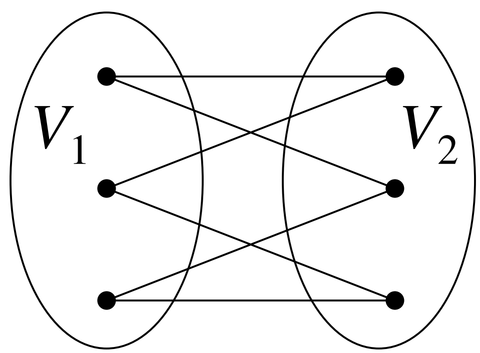
co daje sprzeczność z założeniem. Stąd można przyjąć, że $m(G_1) \geq n(G_1)$ i z założenia indukcyjnego G_1 (więc również G) zawiera cykl.

(c) Z (a) oraz (b) wynika teza.

Grafy dwudzielne

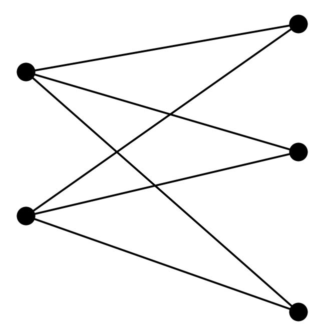
- *Graf dwudzielny* $G = (V_1 \cup V_2, E)$, gdzie $G[V_1]$ oraz $G[V_2]$ są grafami pustymi (istnieje podział V na podzbiory V_1 i V_2 takie, że każda krawędź grafu łączy wierzchołki z różnych zbiorów V_i). Szczególnym przypadkiem są pełne grafy dwudzielne $K_{a,b} = N_a + N_b$. W takim przypadku zachodzą wzory.

$$m(K_{a,b}) = a \cdot b,$$
$$n(K_{a,b}) = a + b.$$



Graf dwudzielny (2-regularny)

$K_{2,3} =$



Grafy dwudzielne

Tw. *Graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy cykl w G ma parzystą długość.*

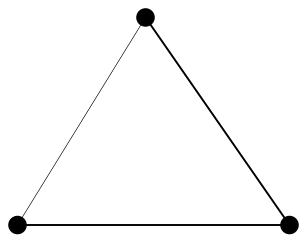
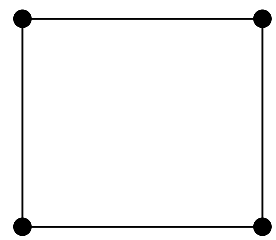
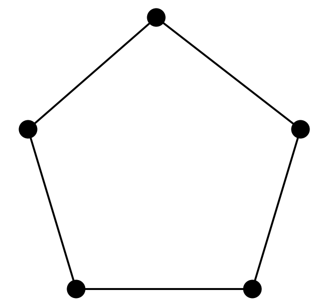
Dowód:

Załóżmy, że $G=(V_1 \cup V_2, E)$ jest dwudzielny oraz $v_1,...,v_k$ jest dowolnym jego cyklem. Bez straty ogólności można założyć, że $v_1 \in V_1$. Stąd, że v_1 i v_2 są sąsiednie wynika, że $v_2 \in V_2$. Ogólnie, $v_{2p} \in V_2$ oraz $v_{2p+1} \in V_1$, co oznacza, że wierzchołek $v_k \in V_2$ ponieważ jest sąsiedni z v_1.

Załóżmy, że każdy cykl w G ma parzystą długość. Definiujemy podział V następująco: $A_v = \{w \in V : d(v,w) \text{ jest parzyste}\}$, $B_v = V \setminus A_v$, gdzie $d(v,w)$ jest długością najkrótszej ścieżki łączącej v z w. Wierzchołki w A_v są parami niesąsiednie, gdyż sytuacja x, $y \in A_v$ oraz $\{x,y\} \in E$ oznacza, że w G występuje nieparzysty cykl o długości $d(v,x) + d(v,y) + 1$, sprzeczność. Podobnie można uzasadnić że krawędź pomiędzy elementami B_v implikuje istnienie nieparzystego cyklu w G.

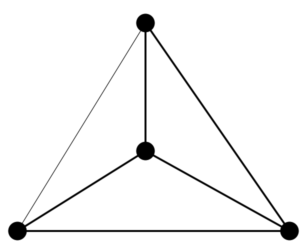
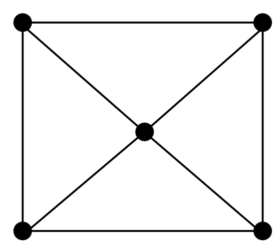
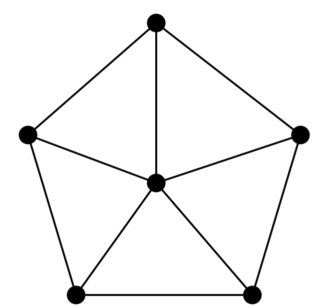
Przykłady grafów

- *Cykl* $C_n = (\{v_1,\dots,v_n\} \ , \{\{v_1,v_2\},\dots,\{v_{n\text{-}1},v_n\}, \{v_n,v_1\}\} \ )$

$C_3 =$  $C_4 =$  $C_5 =$ 

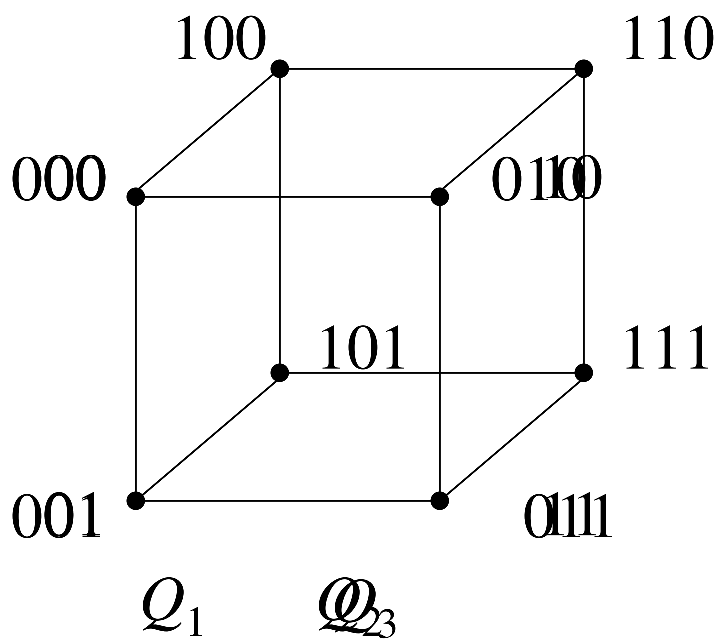
- *Koło* $W_n = (\{v_1,\dots,v_n\} \ , \{\{v_1,v_2\},\dots,\{v_{n\text{-}1},v_n\}, \{v_n,v_1\}\} \ )$

$$W_n = C_{n-1} + N_1$$

$W_4 =$  $W_5 =$  $W_6 =$ 

Hiperkostki

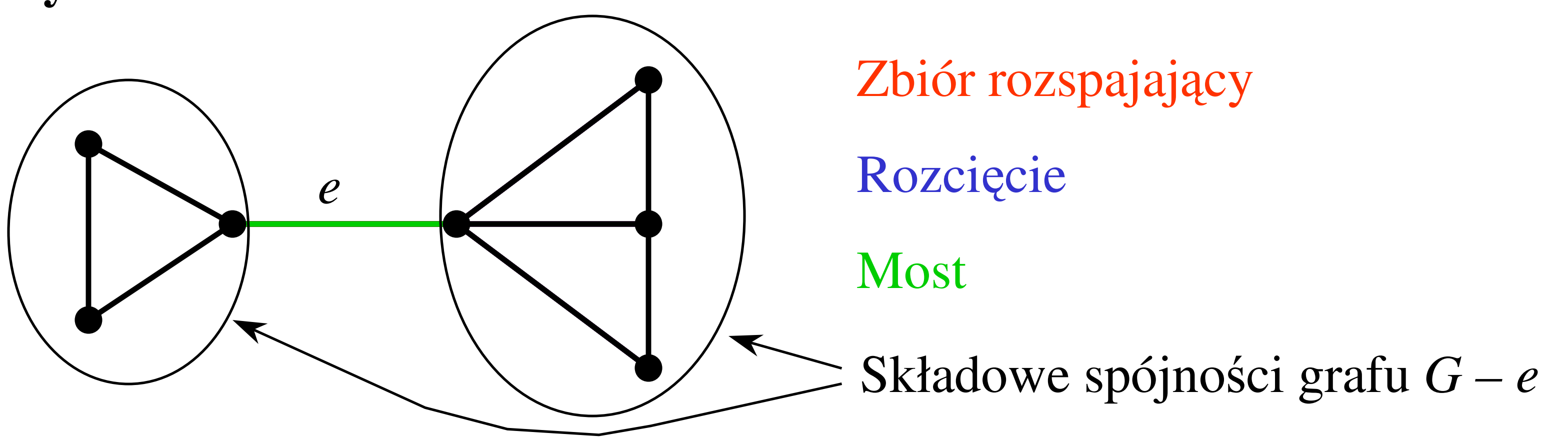
• hiperkostka Q_n jest grafem, którego wierzchołki odpowiadają wszystkim ciągom zero-jedynkowym długości n. Dwa wierzchołki są sąsiednie, o ile odpowiadające im ciągi różnią się na jednej pozycji.



Spójność krawędziowa

Def. Graf jest *spójny*, gdy pomiędzy każdą parą wierzchołków istnieje droga. *Zbiór rozspajający* grafu to zbiór krawędzi, których usunięcie rozspaja graf. *Rozcięcie* to zbiór rozspajający, którego żaden właściwy podzbiór nie rozspaja grafu. *Spójność krawędziowa* jest mocą najmniejszego rozcięcia (oznaczenie: $\lambda(G)$). *Składowa spójności* grafu G jest podgrafem H takim, że $G = H \cup G'$, dla pewnego G'. Krawędź e nazywamy *mostem*, gdy $\{e\}$ jest rozcięciem.

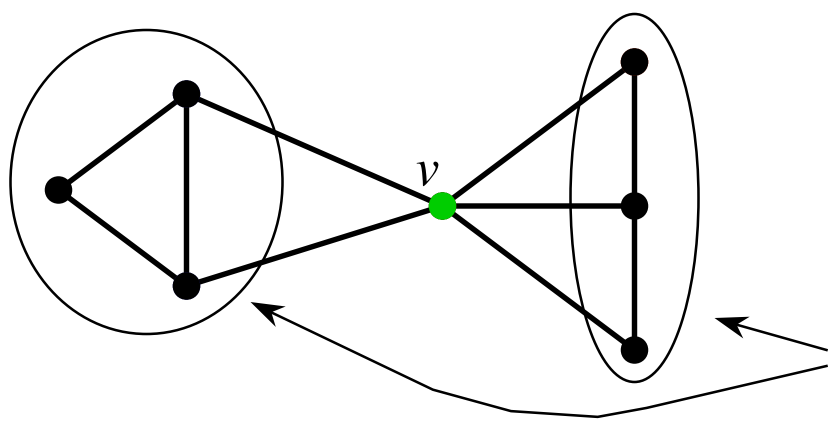
Przykład



Spójność wierzchołkowa

Def. *Zbiór separujący* grafu to zbiór wierzchołków, których usunięcie rozspaja graf. *Separator* to zbiór separujący, którego żaden właściwy podzbiór nie rozspaja grafu. *Spójność wierzchołkowa* jest mocą najmniejszego separatora (oznaczenie: $\chi(G)$). Wierzchołek v nazywamy *przegubem*, gdy $\{v\}$ jest separatorem.

Przykład



Zbiór separujący

Separator

Przegub

Składowe spójności grafu $G - v$

Spójność grafu

Tw. *Jeśli graf G posiada k składowych spójności, to*

$$n - k \leq m.$$

Dowód: Dowodzimy twierdzenie indukcyjnie względem k.

1) Niech $k = 1$. Graf ma minimalną ilość krawędzi wówczas, gdy usunięcie dowolnej z nich rozspaja graf. Wybierzmy dowolny wierzchołek będący liściem i usuńmy go z grafu wraz z incydentną krawędzią. W wyniku tej operacji liczba krawędzi i wierzchołków maleją o 1. Po pewnej liczbie kroków otrzymujemy graf K_2.
2) Zakładamy, że twierdzenie zachodzi dla pewnego k.
3) Dowodzimy dla $k + 1$. Dodajemy do grafu krawędź e tak, aby łączyła dwie składowe spójności. Wówczas korzystając z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$$n(G+e) - (k - 1) \leq m(G+e).$$

Po uwzględnieniu, że $n(G+e) = n(G)$ oraz $m(G+e) = m(G) + 1$ otrzymujemy tezę.

Spójność grafu

Tw. *Jeśli graf G posiada k składowych spójności, to*

$$m \le (n - k)(n - k + 1)/2.$$

Dowód: Rozważmy n-wierzchołkowy graf G, o największej możliwej liczbie krawędzi, który posiada k składowych spójności $G_1,...,G_k$ takich, że $|V(G_{i+1})| \le |V(G_i)|$. Załóżmy, że wierzchołek u należy do najliczniejszej składowej spójności , natomiast v należy do składowej G_2. Zauważmy, że jeśli $|V(G_2)| > 1$, to przeniesienie wierzchołka v z G_2 do G_1 nie zmieni liczby składowych spójności, liczba krawędzi natomiast wzrośnie, co daje sprzeczność. Stąd $|V(G_i)| = 1$ dla $i > 1$. Stąd, $m(G) = m(K_{n-k}) = (n - k)(n - k + 1)/2$, co kończy dowód.

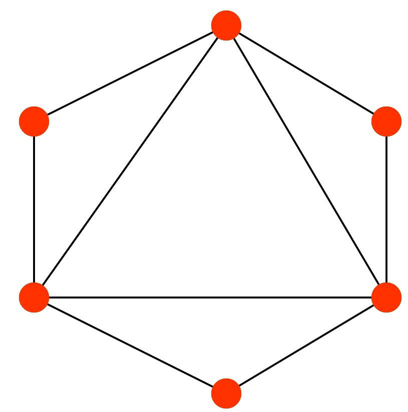
Wniosek *Dowolny n-wierzchołkowy graf posiadający więcej niż* $(n - 2)(n - 1)/2$ *krawędzi jest spójny*.

Sprawdzanie spójności grafu

Procedure Spójny(G)
begin
S := { v }; (* gdzie v jest dowolnym wierzchołkiem grafu G *)
while istnieje nieoznaczony wierzchołek $v \in S$ **do begin**
$S := S \cup N(v)$;
oznacz wierzchołek v;
end;
if $S = V(G)$ **then**
return „graf G jest spójny”;
else
return „graf G nie jest spójny”;
end

Przykład Oznaczenia:

- oznaczone elementy S;
- nieoznaczone elementy S;
- bieżący wierzchołek v;



Odp: „graf G jest spójny”

Drzewa

- *Drzewo* – graf spójny, który nie zawiera podgrafu będącego cyklem. Dla tej klasy grafów zachodzi $m = n - 1$. Wierzchołek o stopniu równym 1 nazywamy *liściem*.

- ścieżki: $P_n = (\{v_1,...,v_n\},\{\{v_1,v_2\}, ...,\{v_{n\text{-}1},v_n\}\})$
- gwiazdy: $K_{1,n-1} = (\{v_1,...,v_n\},\{\{v_1,v_2\}, ...,\{v_1,v_n\}\}) = N_1 + N_{n\text{-}1}$
- kometa – graf powstały poprzez połączenie pewnego wierzchołka gwiazdy z liściem należącym do ścieżki
- gąsienica – graf, w którym można wyróżnić taką ścieżkę, że każdy liść w grafie jest sąsiedni z pewnym wierzchołkiem ścieżki
- dwugwiazda – wszystkie wierzchołki, z wyjątkiem dwóch mają stopień równy 1
- drzewo binarne – drzewo, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy co najwyżej 3

Drzewa

Tw. Niech T będzie drzewem o n wierzchołkach. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) T jest drzewem;

(2) T nie zawiera cykli i ma $n - 1$ krawędzi;

(3) T jest grafem spójnym i ma $n - 1$ krawędzi;

(4) T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem;

(5) każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą;

(6) T nie zawiera cyklu, ale po dodaniu dowolnej krawędzi otrzymany graf ma dokładnie jeden cykl.

Dowód: Wykażemy twierdzenie indukcyjnie względem n. Jeśli $n = 1$, to twierdzenie jest prawdziwe. Załóżmy, że jest prawdziwe również dla wszystkich drzew T, których rząd jest mniejszy niż n. Następnie wykażemy równoważność warunków dla drzewa T o n wierzchołkach.

Drzewa

Dowód (cd.):

(1) $\Rightarrow$(2) [T jest drzewem $\Rightarrow$ T nie zawiera cykli i ma $n - 1$ krawędzi]

T jest drzewem, więc nie zawiera cykli. Po usunięciu dowolnej krawędzi e otrzymujemy $T - e = T_1 \cup T_2$. Z założenia indukcyjnego mamy $m(T_i) = n(T_i) - 1$, $i = 1,2$. Stąd

$$m(T) = n(T_1) - 1 + n(T_2) - 1 + 1 = n(T) - 1.$$

(2) $\Rightarrow$(3) [T nie zawiera cykli i ma $n - 1$ krawędzi $\Rightarrow$ T jest grafem spójnym i ma $n - 1$ krawędzi]

Załóżmy, że T nie jest grafem spójnym. Wtedy $T = T_1 \cup T_2$. To oznacza, że

$$m(T) = m(T_1) + m(T_2) = n(T_1) + n(T_2) - 2,$$

na mocy założenia indukcyjnego. Stąd $m(T) = n(T) - 2$. Ale z warunku (2) wynika, że $m(T) = n(T) - 1$, co daje sprzeczność.

Drzewa

Dowód (cd.):

(3) $\Rightarrow$(4) [T jest grafem spójnym i ma $n - 1$ krawędzi $\Rightarrow$ T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem]

Graf $T - e$ nie jest spójny, gdyż podaliśmy wcześniej twierdzenie mówiące, iż dla grafu o k składowych spójności zachodzi $n - k \leq m$. W przypadku grafu $T - e$ mamy $k = 1$ oraz $m = n - 2$.

(4) $\Rightarrow$(5) [T jest grafem spójnym i każda krawędź jest mostem $\Rightarrow$ każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą]

Gdyby pomiędzy pewną parą wierzchołków istniały dwie drogi, to tworzyłyby one cykl. Usunięcie dowolnej krawędzi z tego cyklu nie spowoduje rozspojenia grafu, co przeczy założeniu, iż każda krawędź jest mostem.

Drzewa

Dowód (cd.):

(5) $\Rightarrow$(6) [każde dwa wierzchołki T są połączone dokładnie jedną drogą $\Rightarrow$ T nie zawiera cyklu, ale po dodaniu dowolnej krawędzi otrzymany graf ma dokładnie jeden cykl]

Załóżmy, że graf T zawiera cykl. Wówczas pewne dwa wierzchołki, należące do tego cyklu, są połączone dwiema różnymi drogami. Sprzeczność. Po operacji dodania krawędzi graf $T + \{u,v\}$ zawiera cykl, ponieważ wierzchołki u oraz v są połączone w grafie T drogą.

(6) $\Rightarrow$(1) [T nie zawiera cyklu, ale po dodaniu dowolnej krawędzi otrzymany graf ma dokładnie jeden cykl $\Rightarrow$ T jest drzewem]

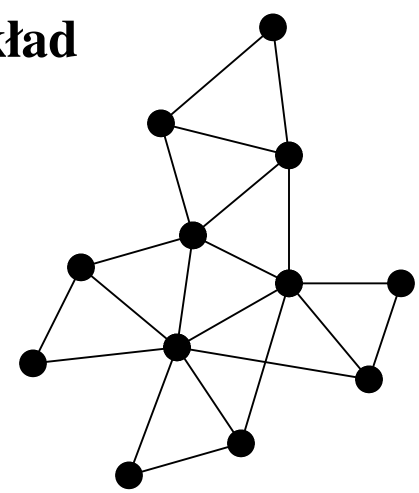
Wystarczy wykazać, że graf T jest spójny. Gdyby tak nie było, to T graf $T + \{u,v\}$ nie zawiera cyklu, gdzie $T = T_1 \cup T_2$ oraz $u \in \mathrm{V}(T_1)$, $v \in \mathrm{V}(T_2)$. Sprzeczność.

k-drzewa

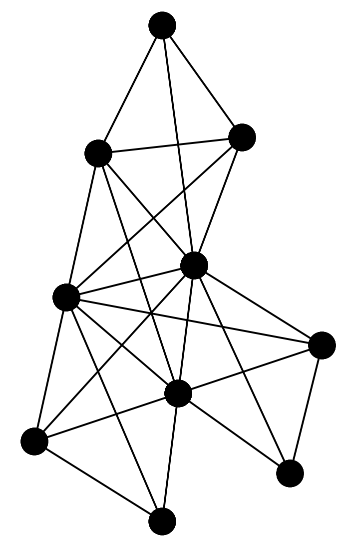
Def. (*k-drzewo*) *k*-drzewem jest graf pełny K_k. Jeśli G jest *k*-drzewem o n wierzchołkach, to $(n+1)$-wierzchołkowe *k*-drzewo powstaje z G poprzez dodanie wierzchołka sąsiedniego do wszystkich wierzchołków pewnej kliki w o k wierzchołkach w G. *Częściowe k-drzewo* to dowolny podgraf *k*-drzewa.

Uwaga Każde drzewo jest 1-drzewem

Przykład



2-drzewo



3-drzewo

Macierz sąsiedztwa

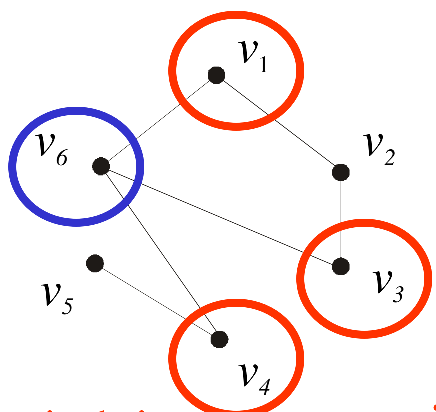
Macierz sąsiedztwa jest strukturą danych służącą do reprezentacji grafów w pamięci komputera. Dla danego grafu G określamy kwadratową tablicę M o wymiarach $n \times n$ taką, że

$$M[i,j] = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ 1, & \text{gdy } \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$$

Przykład

Przykład: sąsiedztwo wierzchołka v_6

$G =$



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wierzchołek v_6 jest sąsiedni z: v_1, v_3 i v_4

Macierz sąsiedztwa

Zalety:

- sprawdzenie, czy $\{v_i, v_j\} \in E(G)$, dodanie oraz usunięcie krawędzi to operacje dokonywane w stałym czasie
- struktura danych łatwa w implementacji

Wady:

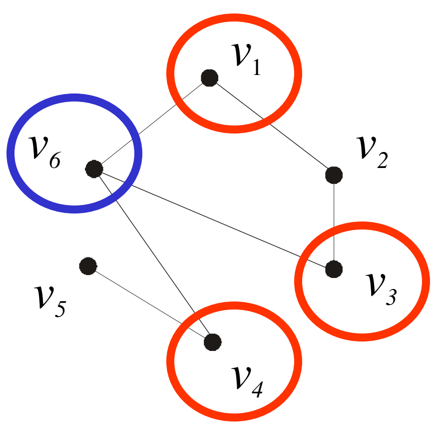
- przechowywanie macierzy wymaga $O(n^2)$ pamięci
- przejrzenie zbioru krawędzi dokonywane w czasie $O(n^2)$ zamiast $O(m)$

Lista sąsiedztwa

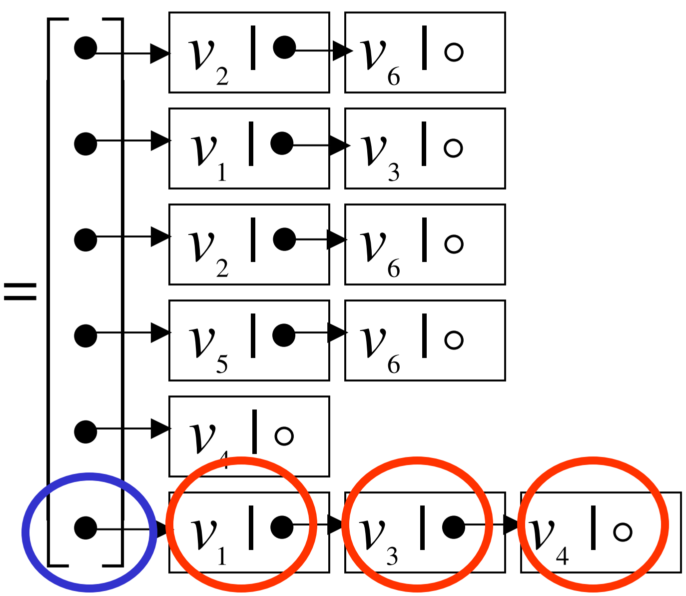
Lista sąsiedztwa jest strukturą danych, w której występuje n-elementowy wektor N zwany nagłówkiem taki, że $N[i]$ jest wskaźnikiem na listę zawierającą sąsiadów wierzchołka v_i.

Przykład

$G =$



$N =$



Przykład: lista sąsiadów wierzchołka v_6

Wierzchołek v_6 jest sąsiedni z: v_1, v_3 oraz v_4

Lista sąsiedztwa

Zalety:

- przejrzenie zbioru krawędzi dokonywane w czasie O(m)
- oszczędność pamięci – wymagana pamięć rzędu O(m)

Wady:

- sprawdzenie, czy $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ wymaga czasu proporcjonalnego do min{deg(v_i), deg(v_j)}
- usunięcie krawędzi $\{u,v\}$ wymaga czasu proporcjonalnego do max{ deg(u), deg(v) }

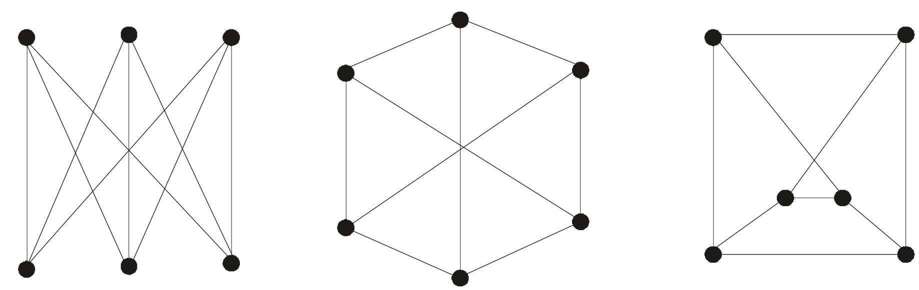
Izomorfizm grafów

Def. Niech będą dane dwa grafy G_1 i G_2 o tej samej liczbie wierzchołków. Powyższe grafy są izomorficzne o ile istnieje bijekcja $f{:}V(G_1)\rightarrow V(G_2)$ taka, że wierzchołki u i v są sąsiednie w grafie G_1 wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołki $f(u)$ i $f(v)$ są sąsiednie w G_2.

Tw. *Jeśli grafy G_1 i G_2 są izomorficzne, to*

1. $|V(G_1)| = |V(G_2)|$
2. $|E(G_1)| = |E(G_2)|$
3. *Ciągi stopniowe tych grafów są sobie równe*

Przykład Następujące trzy grafy są izomorficzne:



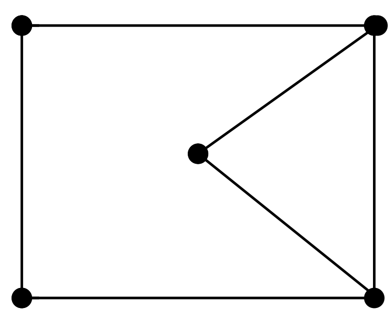
Izomorfizm grafów

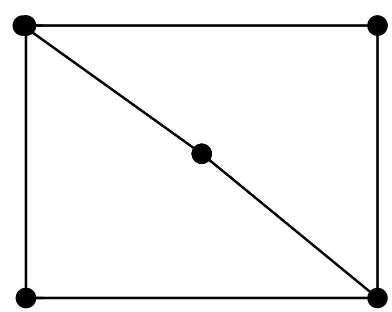
Uwaga. Warunki podane w powyższym twierdzeniu nie są wystarczające do tego, aby dwa grafy były izomorficzne.

Dla poniższych dwóch grafów G_1, G_2 mamy

1. $|V(G_1)| = |V(G_2)|$
2. $|E(G_1)| = |E(G_2)|$
3. *Ciągi stopniowe tych grafów są sobie równe,*

lecz nie są one izomorficzne.

$G_1 =$ 

$G_2 =$ 

Uwaga Nie wiadomo, czy istnieje wielomianowy algorytm, stwierdzający, czy podane na wejściu dwa grafy są izomorficzne.

Izomorfizm grafów

Przykład Sześć postaci grafu Petersena