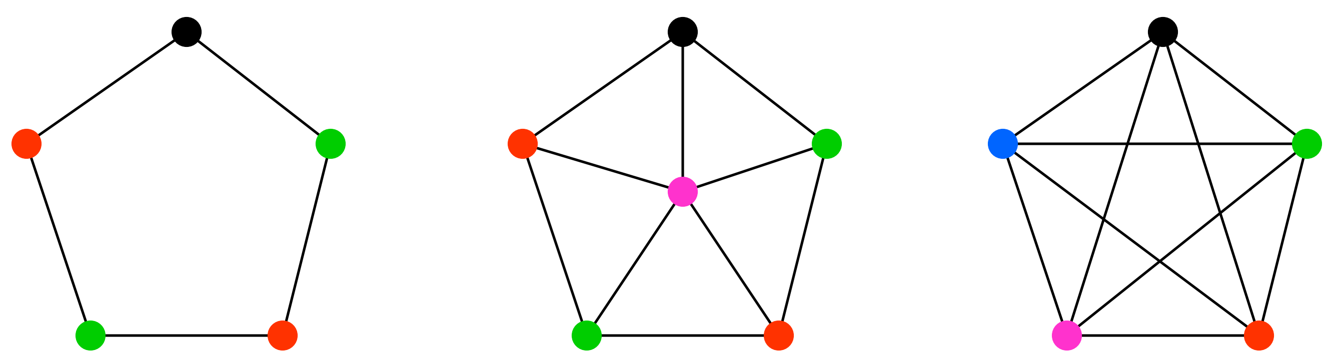
Kolorowanie wierzchołków

Def. Niech G będzie grafem prostym. Przez *kolorowanie wierzchołków* rozumiemy takie etykietowanie elementów $V(G)$ liczbami naturalnymi, że sąsiednie wierzchołki otrzymują różne liczby (kolory, etykiety).

Def. *Liczba chromatyczna* grafu G jest to najmniejsza liczba k taka, że istnieje pokolorowanie G za pomocą k kolorów i jest oznaczana symbolem $\chi(G)$.

Przykład Optymalne (zużywające minimalną liczbę kolorów) pokolorowania grafów C_5, W_6, K_5.



Kolorowanie wierzchołków

Uwaga Problem wyznaczania liczby chromatycznej jest w ogólności NP-trudny. Zatem, w praktyce użyteczne są oszacowania.

Def. *Kliką* grafu G nazywamy jego podgraf pełny.

Lemat *Prawdziwe jest następujące oszacowanie dolne*:

$$\chi(G) \geq \omega,$$

gdzie ω jest rozmiarem maksymalnej kliki grafu G.

Uwaga Powyższe oszacowanie ma dwie wady:

- ω jest parametrem trudnym do wyliczenia. Ze związku $\frac{n^2}{n^2 - 2m} \leq \omega$ otrzymujemy oszacowanie mniej dokładne, lecz łatwe do obliczenia.
- różnica pomiędzy $\chi(G)$ a ω może być dowolnie duża, na co przykładem są grafy Mycielskiego.

Kolorowanie wierzchołków

Tw. *Dla dowolnego grafu o maksymalnym stopniu wierzchołka* Δ *zachodzi oszacowanie* $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Dowód: Przeprowadzimy indukcję względem n.

- Jeśli $n = 1$, to nierówność oczywiście zachodzi.
- Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnego $n > 0$.
- Dowodzimy przypadek, gdy graf G ma $n + 1$ wierzchołków. Usuńmy z G dowolny wierzchołek v. Dla grafu $G - v$ z założenia indukcyjnego mamy: $\chi(G - v) \leq \Delta + 1$. Wierzchołek v ma w grafie G co najwyżej Δ sąsiadów, więc jeden spośród $\Delta+1$ kolorów jest dla v dostępny, co pozwala uzyskać pokolorowanie G za pomocą co najwyżej $\Delta+1$ barw.

Tw (Brooks, 1941) *Istnieją dwie klasy grafów, dla których* $\chi(G) = \Delta + 1$: *grafy pełne oraz cykle o nieparzystej liczbie wierzchołków*.

Wniosek *Jeśli* $G \neq K_n$ *oraz* $\Delta \geq 3$, *to* $\chi(G) \leq \Delta$.

Kolorowanie wierzchołków

Uwaga Oszacowanie $\chi(G) \leq \Delta$ może być bardzo niedokładne, zwłaszcza dla gwiazd, dla których $\chi(K_{1,s}) = 2$ oraz $\Delta(K_{1,s}) = s$.

Tw. *Dla grafu G o m krawędziach zachodzą oszacowania*:

$$\chi(G) \leq \sqrt{2m} + 1,$$

$$\chi(G) \leq \lambda + 1,$$

gdzie λ jest długością najdłuższej drogi w grafie *G*.

Uwaga Pierwsze z powyższych oszacowań może być niedokładne, gdyż dla grafów pełnych dwudzielnych $K_{k,k}$ różnica

$$\sqrt{2k^2} + 1 - \chi(G) = \sqrt{2}k - 1$$

może przyjmować dowolnie dużą wartość.

Uwaga Drugie z oszacowań jest niedokładne dla ścieżki P_n, dla której $\chi(P_n) = 2$ oraz $\lambda(P_n) = n - 1$.

Kolorowanie grafów planarnych

Tw. *Każdy graf planarny jest* 6-*barwny*.

Dowód: Zastosujemy indukcję względem liczby wierzchołków grafu.

- Jeśli $n = 1$, to twierdzenie jest oczywiście prawdziwe.
- Zakładamy, że własność zachodzi dla wszystkich $(n-1)$-wierzchołkowych grafów planarnych.
- Niech G będzie grafem planarnym o n wierzchołkach. Wiemy, że G posiada co najmniej jeden pąk v (wierzchołek o stopniu mniejszym lub równym 5). Po usunięciu v mamy $(n - 1)$-wierzchołkowy graf planarny $G - v$, do którego stosujemy założenie indukcyjne otrzymując jego 6-pokolorowanie. Wierzchołek v ma w G co najwyżej 5 sąsiadów, więc jeden z sześciu kolorów będzie dla v dostępny. Stąd G jest 6-barwny.

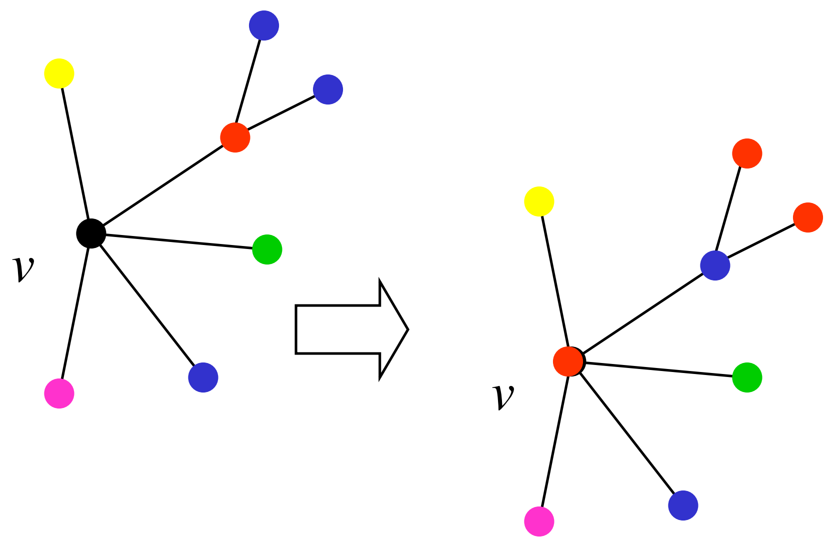
Kolorowanie grafów planarnych

Tw. (Heawood, 1890) *Każdy graf planarny jest* 5-*barwny*.

Dowód: Podobnie jak w poprzednim twierdzeniu, stosujemy indukcję względem n. Jeśli wyznaczymy (z zał. ind.) 5-pokolorowanie $G - v$ (gdzie v jest pąkiem) i wierzchołek v jest incydentny z co najwyżej 4 kolorami, to twierdzenie zachodzi. W przeciwnym wypadku rozważamy 2 sytuacje (kolory 1 – czerwony, 2 – zielony, 3 – niebieski, 4 – fioletowy):

Przypadek 1:

- Wierzchołki o kolorach 1,3 (sąsiedzi v) należą do różnych składowych grafu indukowanego przez wierzchołki o kolorach 1,3 (w całym grafie $G - v$)
- Wtedy zamieniamy kolory 1 i 3 w składowej zawierającej wierzchołek o kolorze 1 (sąsiedni z v)
- v otrzymuje kolor 1

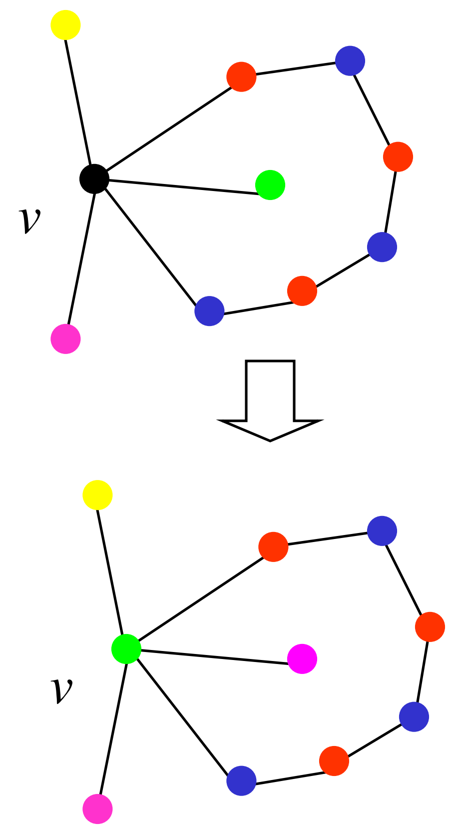


Kolorowanie grafów planarnych

Dowód (c.d.):

Przypadek 2:

- Wierzchołki o kolorach 1,3 (sąsiedzi *v*) wraz z *v* tworzą cykl w *G*
- Wtedy w składowej spójności zawierającej sąsiada *v* o kolorze 2 możemy zamienić kolory 2 i 4
- *v* otrzymuje kolor 2



Tw. (Appel, Haken + komputer, 1976) *Każdy graf planarny jest* 4-*barwny.*

Algorytmy przybliżone

Przez $A(G)$ oznaczmy liczbę kolorów, którą algorytm A używa podczas kolorowania grafu G. Wyróżniamy następujące parametry, uwzględniane podczas opisu algorytmu przybliżonego A:

1) Złożoność obliczeniowa.

2) *Funkcja dobroci* zdefiniowana jako:

$$A(n) = \max\{ A(G)/\chi(G) : G \text{ ma } n \text{ wierzchołków } \}.$$

Najgorszą możliwą funkcją dobroci jest $A(n)=n$, najlepszą zaś $A(n)=1$.

3) Najmniejszy *dość trudny* graf – najmniejszy graf G, dla którego algorytm <u>może</u> użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

4) Najmniejszy *trudny* graf – najmniejszy graf G, dla którego algorytm <u>musi</u> użyć więcej kolorów niż $\chi(G)$.

Algorytm sekwencyjny

Algorytm sekwencyjny S można opisać następująco:

- Uporządkuj w dowolny sposób wierzchołki grafu G $v_1,\ldots,v_n$.
- Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

1) algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu

2) Ścieżka P_4 jest najmniejszym dość trudnym grafem

3) Graf trudny nie istnieje

4) Funkcja dobroci jest liniowa. Jej oczekiwana wartość wynika z oszacowania: $S(G) \leq (2 + \varepsilon)\, \chi(G)$

5) Złożoność $O(n + m)$

Algorytm *LF*

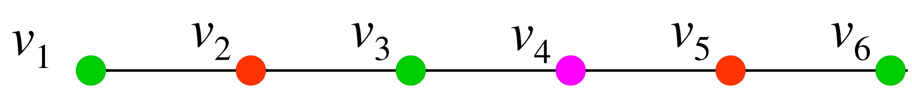
Algorytm *LF* (largest first) można opisać następująco:

- Uporządkuj wierzchołki grafu G nierosnąco według stopni $v_1,\ldots,v_n$.
- Koloruj wierzchołki zachłannie zgodnie z przyjętą permutacją

Własności:

1) algorytm statyczny – kolejność wierzchołków ustalona na początku nie zmienia się podczas realizacji algorytmu

2) Ścieżka P_6 jest najmniejszym dość trudnym grafem:

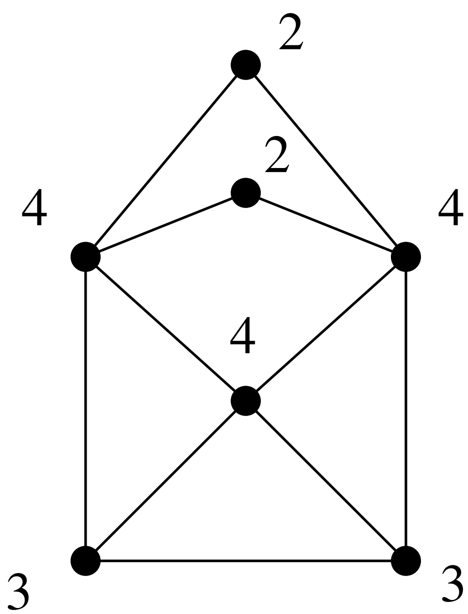


Kolejność wierzchołków: v_2, v_5, v_3, v_4, v_1, v_6.

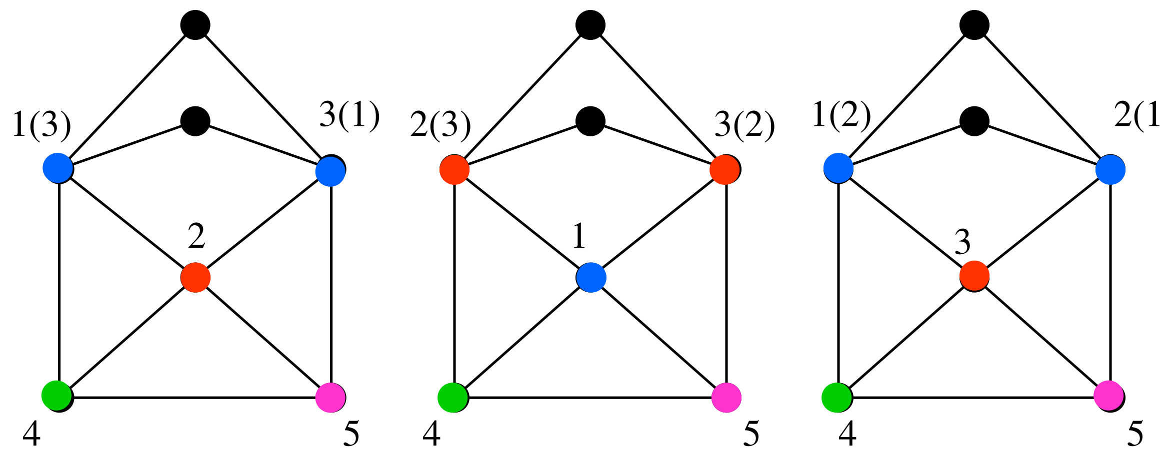
Algorytm *LF*

Własności algorytm *LF* (c.d.):

3) najmniejszym trudnym grafem do kolorowania jest „koperta”, która jest grafem 3-barwnym, natomiast *LF* zużywa czterech kolorów:



„Koperta” wraz z oznaczonymi stopniami wierzchołków



a) Szeregujemy wierzchołki stopnia 4

b) Kolorujemy te wierzchołki

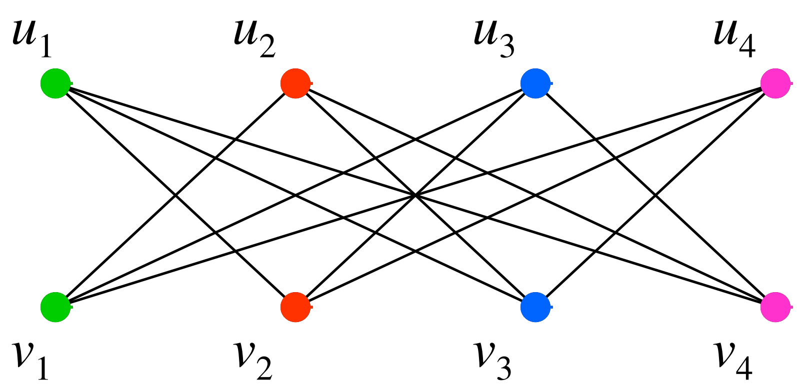
c) W każdym przypadku wybór wierzch. stopnia 3 jest symetryczny

d) We wszystkich przyp. wymagany kolor nr 4

Algorytm *LF*

Własności algorytm *LF* (cd.):

4) funkcja dobroci to $O(n)$. Zdefiniujmy k-ty graf Johnsona J_k jako $K_{k,k} - M$, gdzie $M = \{\{u_i, v_i\}: u_i \in V_1(K_{k,k}), v_i \in V_2(K_{k,k})\}$. Przykład grafu J_4 pokazuje rysunek (wraz z pokolorowaniem utworzonym przez algorytm *LF*).



$\chi(J_k) = 2$, gdyż grafy Johnsona są dwudzielne. Dla permutacji wierzchołków $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_k, u_k$ algorytm *LF* używa k kolorów.

Stąd

$$\frac{LF(J_k)}{\chi(J_k)} = \frac{n/2}{2} = \frac{n}{4}$$

Algorytm *SL*

Algorytm *SL* (smallest last) składa się z dwóch etapów:

1) faza redukcji grafu: znajdujemy wierzchołek o minimalnym stopniu i usuwamy go z grafu (powtarzamy dopóki graf nie jest pusty).
2) kolorujemy wierzchołki zachłannie w kolejności ustalonej w poprzednim kroku, zaczynając od wierzchołków usuwanych później.

Własności:

- Algorytm statyczny
- Złożoność algorytmu: $O(n+m)$
- Funkcja dobroci jest liniowa
- Przypadki pozytywne: drzewa, cykle, grafy jednocykliczne, koła, grafy Mycielskiego, grafy Johnsona, grafy planarne

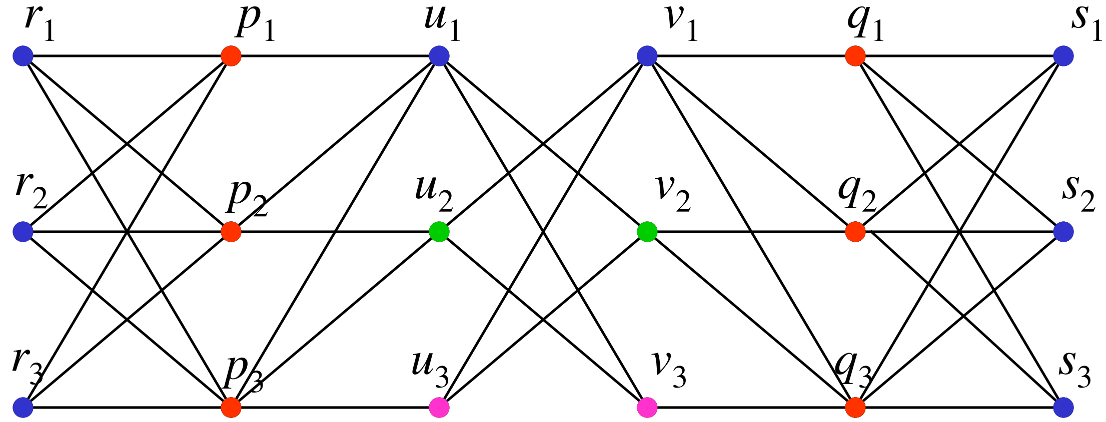
Algorytm *SL*

Własności (cd.) :

• Przypadki półpozytywne: grafy planarne (za pomocą sześciu kolorów w czasie $O(n)$)

• Przypadki negatywne: grafy dwudzielne, grafy Colemana-Moore'a

permutacja *SL* to: $q_1,s_1,\ldots,q_k,s_k,\ p_1,r_1,\ldots,p_k,r_k,\ u_1,v_1,\ldots,u_k,v_k,$



$SL(CM_3) = 4$

Ogólnie:

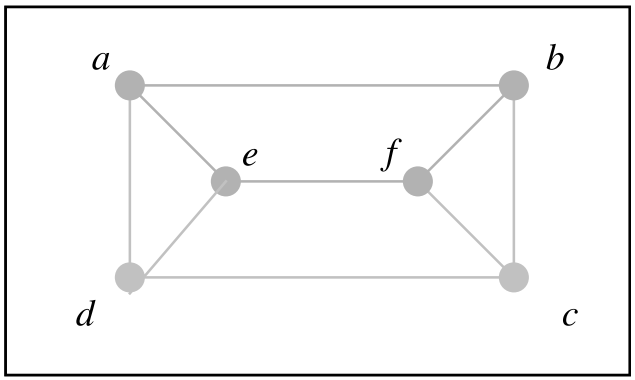
$SL(CM_k) = k+1$

$\chi(CM_k) = 2$

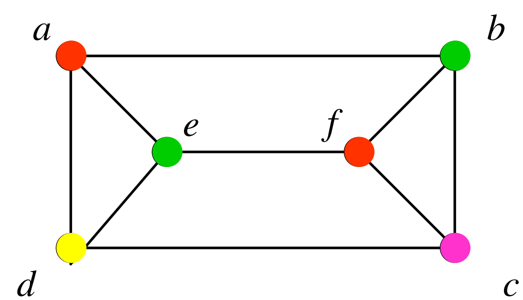
Algorytm *SL*

Własności algorytmu (cd.):

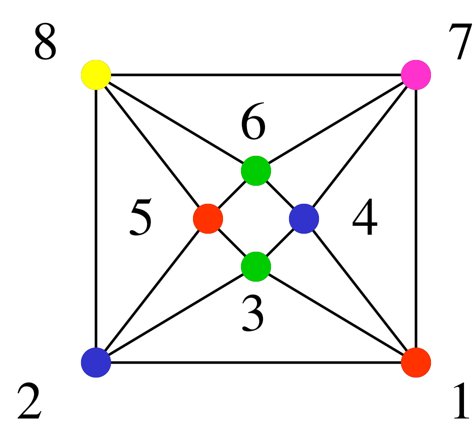
- Najmniejszym dość trudnym grafem jest „pryzma”



Permutacja: $a \;\; b \;\; f \;\; e \;\; c \;\; d$



- Najmniejszym trudnym grafem jest „pryzmatoid”:



Algorytm *SLF*

Algorytm *SLF* (saturacyjny LF) można opisać następująco:

while istnieją niepokolorowane wierzchołki **do begin**
znajdź wierzchołek o maksymalnym stopniu spośród wierzchołków o maksymalnym stopniu nasycenia;
pokoloruj znaleziony wierzchołek zachłannie;
end

Uwaga *Stopień nasycenia* wierzchołka to ilość różnych kolorów incydentnych z tym wierzchołkiem.

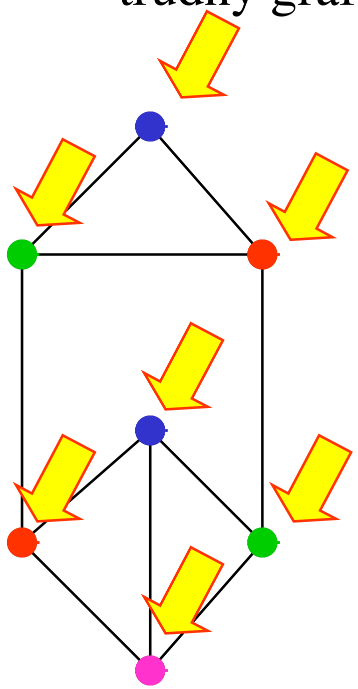
- Przypadki pozytywne: grafy dwudzielne (w tym drzewa i grafy Johnsona), cykle, koła, kaktusy
- Przypadki negatywne: grafy trójdzielne

Algorytm *SLF*

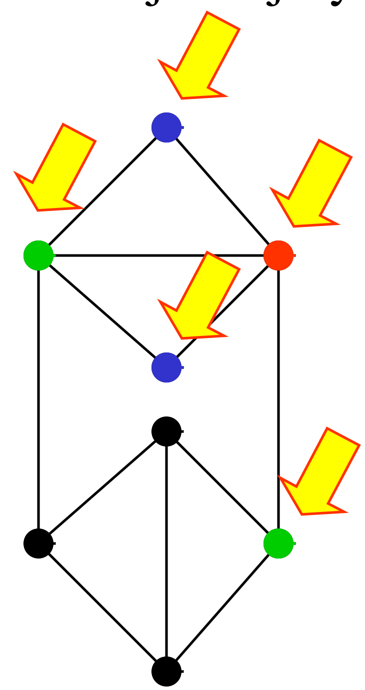
Własności algorytmu:

- Złożoność: $O(m\log n)$

- Najmniejszy dość trudny graf:



- Najmniejszy trudny graf:



Pozostałe wierzchołki mogą być kolorowane w dowolnej kolejności, co zawsze prowadzi do użycia czwartego koloru.

Kolorowanie krawędzi

Def. Funkcja $c{:}E(G)\rightarrow\{1,...,k\}$ jest k-pokolorowaniem krawędziowym grafu G, o ile dla każdej pary sąsiednich krawędzi e i e' zachodzi $c(e)\neq c(e')$. Najmniejsze k, dla którego istnieje krawędziowe k-pokolorowanie nazywamy *indeksem chromatycznym* grafu G i oznaczamy symbolem $\chi'(G)$

Uwaga Pokolorowanie wierzchołków oznaczało rozbicie V na zbiory niezależne, natomiast pokolorowanie krawędzi k kolorami jest rozbiciem grafu na k skojarzeń.

Uwaga Problem kolorowania krawędzi jest równoważny kolorowaniu wierzchołków grafu krawędziowego.

Przykład $\chi'(G) = 2$ dla ścieżek i cykli parzystych

$\chi'(G) = 3$ dla drzew binarnych o $\Delta > 2$ i cykli nieparzystych

Oszacowania dolne

Tw. *Zachodzi oszacowanie* $\Delta \leq \chi'(G)$

Dowód: Wynika stąd, iż wszystkie krawędzie incydentne z tym samym wierzchołkiem muszą otrzymać parami różne kolory.

Tw. *Zachodzi oszacowanie* $\lceil m/t \rceil \leq \chi'(G)$, *gdzie t jest rozmiarem maksymalnego skojarzenia*.

Dowód:

- Niech będzie dane pewne pokolorowanie grafu G.
- Zauważmy, że każdy z k kolorów jest przydzielony co najwyżej t krawędziom grafu G.
- Redukujemy graf, usuwając krawędzie o pewnym ustalonym kolorze.
- W każdym takim kroku usuniemy co najwyżej t krawędzi, co oznacza, że musimy wykonać co najmniej $\lceil m/t \rceil$ powyższych kroków, aby zredukować graf do grafu pustego.
- Ilość kroków jest równa ilości kolorów, co kończy dowód.

Oszacowania górne

Tw. $\chi'(G) \leq \max\{\Delta, \lfloor \deg(u) + \deg(v) + \deg(w)/2 \rfloor\}$, *gdzie maksimum jest obliczane względem wszystkich dróg elementarnych długości* 2.

Tw (Shannon, 1949). $\chi'(G) \leq 3\Delta/2$

Tw (Vizing, 1964). $\chi'(G) \leq \Delta + \mu$, *gdzie* μ *jest maksymalnym zwielokrotnieniem krawędzi w grafie, tzn.* μ *jest największą liczbą k taką, że występuje para wierzchołków połączonych k krawędziami*.

Uwaga

- Dla dużych wartości parametru μ i specyficznych grafów (np. dwuwierzchołkowych), oszacowanie Vizing'a jest słabsze od oszacowania Ore'go.
- Dla $\mu = 1$ oszacowanie Vizing'a jest bardzo dokładne jako, że $\chi'(G) \geq \Delta$.

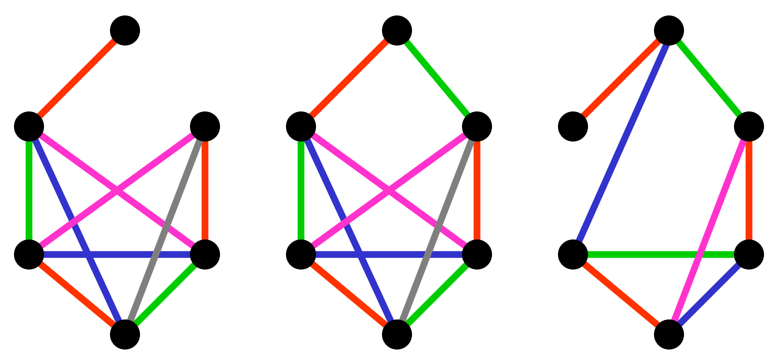
Tw. Vizinga

Wniosek *Dla grafów prostych G zachodzi* $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$.

Uwaga

- Grafy, dla których $\chi'(G) = \Delta$ nazywamy grafami *klasy* 1. Przykłady to grafy dwudzielne, pełne o parzystej liczbie wierzchołków, planarne o $\Delta \geq 8$, nieparzystego rzędu z gwiazdą spinającą.
- Grafy *klasy* 2, to takie, dla których $\chi'(G) = \Delta + 1$. Przykładami są nieparzyste cykle, pełne nieparzystego rzędu, regularne nieparzystego rzędu.

Uwaga Grafów klasy 1 jest znacznie więcej. Np. spośród 112 grafów rzędu 6, tylko 3 są klasy 2.



Algorytm *NC*

Algorytm w każdym kroku wybiera dowolną krawędź i przydziela jej najniższy kolor, spośród kolorów, które nie zostały użyte do pokolorowania krawędzi sąsiednich.

Własności:

- Złożoność algorytmu to $O(m\Delta)$
- Najmniejszym dość trudnym grafem jest ścieżka P_5
- Najmniejszy trudny graf nie istnieje
- Algorytm jest 2-przybliżony, tzn. $NC(G) < 2\chi'(G)$.

  Uzasadnienie: Jeśli algorytm *NC* koloruje pewną krawędź $e = \{u,v\}$, to w najgorszym przypadku są $\deg(u) + \deg(v) - 2$ zabronione kolory dla e.
  Oznacza to, że kolor przydzielony e jest nie większy niż $\deg(u) + \deg(v) - 1$.

  Stąd: $NC(G) \le \max\{ \deg(u) + \deg(u) - 1 : \{u,v\} \in E(G) \}$
  $\le 2\Delta - 1 < 2\Delta \le 2\chi'(G)$.

Algorytm *NTL*

Def. Kolor *brakujący dla wierzchołka v* grafu G to kolor, który nie został przydzielony żadnej krawędzi incydentnej do v. $M(v)$ oznacza zbiór wszystkich kolorów brakujących dla v.

Def. Dla każdego wierzchołka v ustalamy pewien jego kolor brakujący $m(v)$. *Wachlarzem F* przy wierzchołku v rozpoczynającym się krawędzią $\{v,w_0\}$ nazywamy taki ciąg krawędzi $\{v,w_0\}$, $\{v,w_1\}$,..., $\{v,w_s\}$, że $\{v,w_i\}$ ma przydzielony kolor $m(w_{i-1})$, $i > 0$. Liczba s to rozpiętość wachlarza.

Uwaga Jeśli wybrana krawędź $\{u,v\}$ nie jest pokolorowana, to każdy z wierzchołków u,v ma przynajmniej dwa kolory brakujące.

Algorytm *NTL*

Nazwa metody pochodzi od pierwszych liter nazwisk jej twórców (Nishizeki, Terada, Leven)

Procedure AlgorytmNTL(G)
begin
  if $\Delta(G) \leq 2$ **then** koloruj optymalnie trawersując ścieżki i cykle;
  else begin
    $q := \Delta(G) + 1$; $G' := (V(G), \emptyset)$;
    for każda $e \in E(G)$ **do begin**
      $G' := G' + e$;
      if $e = \{u,v\}$ nie może otrzymać wspólnego koloru brakującego
        w u i v **then**
        Recolor(u, v);
      koloruj e;
    end
  end
end

Procedura Recolor

- zamierzamy pokolorować krawędź $\{u,v\}$;
- wyznaczamy maksymalny wachlarz F (t.ż. $w_0=u$) przy wierzchołku v
- przypadek 1: $m(w_s) \in M(v)$, gdzie s to rozpiętość wachlarza
    - wówczas kolorujemy krawędź $\{v,w_i\}$ barwą $m(w_i)$ dla każdego $i=1,\ldots,s$.
- przypadek 2: $m(w_i) \notin M(v)$
    - niech P będzie ścieżką w grafie G zaczynającą się w w_s złożoną z krawędzi pokolorowanych barwami $m(v)$ i $m(w_s)$
    - przypadek 2a: P nie osiąga wierzchołka v: wówczas zamieniamy kolory znajdujące się na ścieżce, $\{v,w_s\}$ otrzymuje kolor $m(v)$ i pozostałe krawędzie $\{v,w_i\}$otrzymują kolory $m(w_i)$;
    - przypadek 2b: P osiąga v: niech w_j, gdzie $j \in \{0,\ldots,s-2\}$będzie wierzchołkiem takim, że $m(w_{j-1})=m(w_s)$. Ścieżka P kończy się w wierzchołku w_j. Zmieniamy kolory wachlarza tak, że krawędź $\{v,w_i\}$ otrzymuje kolor $m(w_i)$ dla $i<j-1$. Zamieniamy kolory na ścieżce P i ostatecznie malujemy $\{v,w_{j-1}\}$ kolorem $m(v)$.