Skojarzenia

Najliczniejsze skojarzenia:

- grafy proste dwudzielne,
- dowolne grafy proste.

Dokładne skojarzenia o maksymalnej sumie wag w obciążonych pełnych grafach dwudzielnych.

Definicje

Def Zbiór krawędzi *M* jest *skojarzeniem* w grafie *G,* jeśli żadne dwie krawędzie należące do *M* nie mają wspólnego wierzchołka.

Problemy:
- najliczniejsze skojarzenie – szukamy skojarzenia zawierającego największą możliwą liczbę krawędzi
- dokładne skojarzenie – pytamy, czy istnieje skojarzenie złożone z $n/2$ krawędzi (n musi być parzyste)
- skojarzenie o minimalnej (maksymalnej) wadze – szukamy w obciążonym grafie takiego skojarzenia, aby suma wag jego krawędzi była możliwie najmniejsza (największa)
- dokładne skojarzenie o minimalnej (maksymalnej) wadze – j.w. oraz dodatkowo skojarzenie musi zawierać $n/2$ krawędzi

Definicje

Def. Niech M będzie dowolnym skojarzeniem.

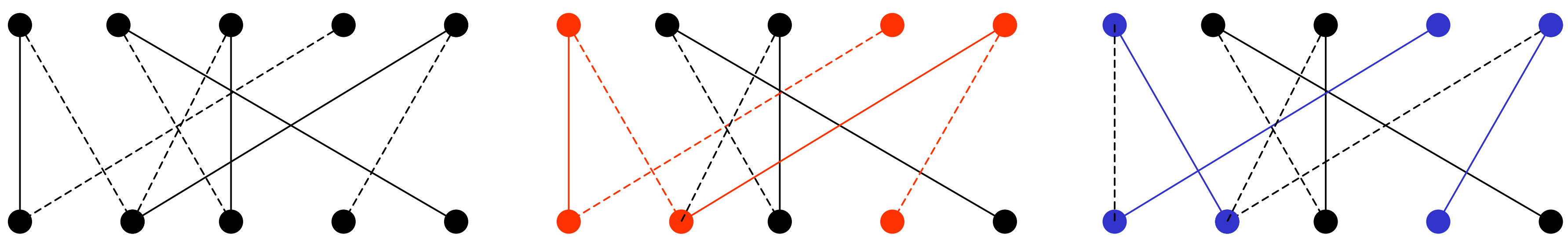
- Krawędź nazywamy *skojarzoną,* jeśli należy ona do M. W przeciwnym wypadku krawędź jest *nieskojarzona*.
- Wierzchołek v nazywamy *wolnym* (w odniesieniu do konkretnego skojarzenia M), jeśli żadna spośród krawędzi należących do M nie zawiera v.
- Droga P jest *naprzemienna* względem M, jeśli dla dowolnych dwóch sąsiednich krawędzi należących do P nie jest prawdą, że jednocześnie należą lub nie należą do M.
- Droga naprzemienna, która zaczyna się i kończy w różnych wierzchołkach wolnych jest *drogą powiększającą*.
- dla wierzchołka $v \in V(G)$ definiujemy $N(v) = \{u \in V(G)\colon \{u,v\} \in E(G)\}$
- dla $S \subseteq V(G)$ definiujemy $$N(S) = \Big(\bigcup_{v \in S} N(v)\Big) \setminus S$$

Drogi powiększające

Def. Niech $A,B \subseteq E(G)$ będą zbiorami. Oznaczmy $A \oplus B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Tw. *Jeśli M jest skojarzeniem, natomiast P drogą powiększająca względem M, to $M' := M \oplus P$ jest również skojarzeniem. Ponadto* $|M'| = |M| + 1$.

Przykład:



Pewne skojarzenie M Droga powiększająca P Skojarzenie $M \oplus P$

Twierdzenie Halla

Tw. *Dwudzielny graf prosty* $G=(A \cup B,E)$ *ma dokładne skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $S \subseteq A$ *zachodzi* $|N(S)| \geq |S|$.

Dowód:

($\Rightarrow$) Niech M będzie dokładnym skojarzeniem oraz niech $S \subseteq A$.

- jeśli $A=\{u_1,\ldots,u_k\}$, $B=\{v_1,\ldots,v_k\}$, to możemy założyć, że $\{u_i,v_i\}\in M$
- wierzchołki v_i skojarzone z wierzchołkami należącymi do S są parami różne i należą do $N(S)$

($\Leftarrow$) Rozważmy najliczniejsze skojarzenie M w grafie G.

- niech u będzie nieskojarzonym wierzchołkiem
- niech X będzie zbiorem wszystkich wierzchołków osiągalnych z u poprzez drogę naprzemienną; niech $L:= X \cap A$, $R:= X \cap B$.
- $N(L) = R$
- jedynym wierzchołkiem wolnym w X jest u, gdyż w przeciwnym wypadku mamy ścieżkę powiększającą. Zatem: $|L| = |R| + 1$
- stąd: $|N(L)| = |R| = |L| - 1 < |L|$, sprzeczność

Kojarzenie małżeństw...

Tw. *Jeśli graf prosty dwudzielny* $G=(A \cup B, E)$ *jest k-regularny, to posiada dokładne skojarzenie.*

Dowód:

- $m = k|A|$ oraz $m = k|B|$, co oznacza, że $|A| = |B|$.
- Niech $S \subseteq A$ będzie dowolny.
- Istnieje dokładnie $k|S|$ krawędzi incydentnych do S.
- Stąd, co najmniej $k|S|$ krawędzi jest incydentnych do $N(S)$.
- Z faktu, że G jest k-regularny wynika, że do $N(S)$ jest incydentnych $k|N(S)|$ krawędzi.
- Zatem: $k|S| \leq k|N(S)|$, co oznacza, że $|S| \leq |N(S)|$.

Twierdzenie Tutte

Def. Symbolem $o(G)$ oznaczamy liczbę składowych spójności grafu G, które posiadają nieparzystą liczbę wierzchołków.

Tw. *Spójny graf prosty G posiada dokładne skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $S \subseteq V(G)$ zachodzi $o(G - S) \leq |S|$.*

Dowód: ($\Rightarrow$)

- Załóżmy, że teza nie zachodzi, tzn. $S \subseteq V(G)$ oraz $G - S$ posiada $|S|+1$składowych nieparzystego rzędu.
- W składowych parzystego rzędu znajdujemy skojarzenia dokładne.
- Każda składowa nieparzystego rzędu posiada wierzchołek, który musi być skojarzony z wierzchołkiem v, który do tej składowej nie należy.
- v musi być elementem S – sprzeczność.

Twierdzenie Tutte

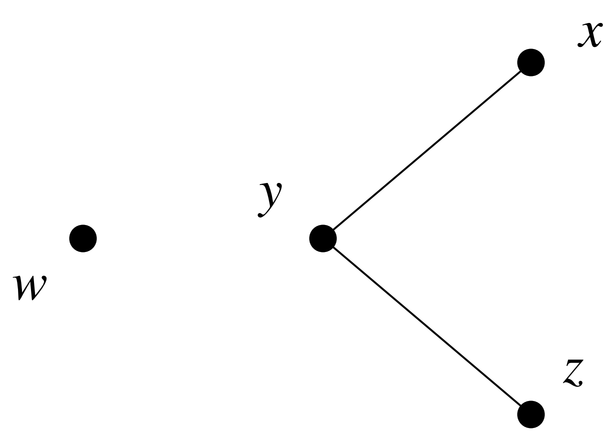
Dowód: ($\Leftarrow$)

- Przypuśćmy, że G nie posiada dokładnego skojarzenia.
- Tworzymy graf F dodając do G krawędzie, aż będzie spełniony warunek:
  - F nie posiada dokładnego skojarzenia,
  - po dodaniu dowolnej krawędzi e do F graf $F+e$ posiada skojarzenie dokładne.
- Definiujemy zbiór U zawierający wierzchołki stopnia $n-1$ w grafie F.
- Oczywiście U jest różny od V, gdyż w przeciwnym wypadku F miałby dokładne skojarzenie.

Twierdzenie Tutte

Lemat *Graf $F - U$ jest sumą grafów pełnych.*
Dowód:

- Załóżmy, że lemat nie zachodzi.
- Istnieje składowa H w grafie $F - U$, która nie jest grafem pełnym.
- Znajdujemy wierzchołki x,y,z takie, że $\{x,y\},\{y,z\} \in E(H)$ oraz $\{x,z\} \notin E(H)$.
- Z faktu, że y nie należy do U wynika, że istnieje wierzchołek w, z którym y nie jest sąsiedni.

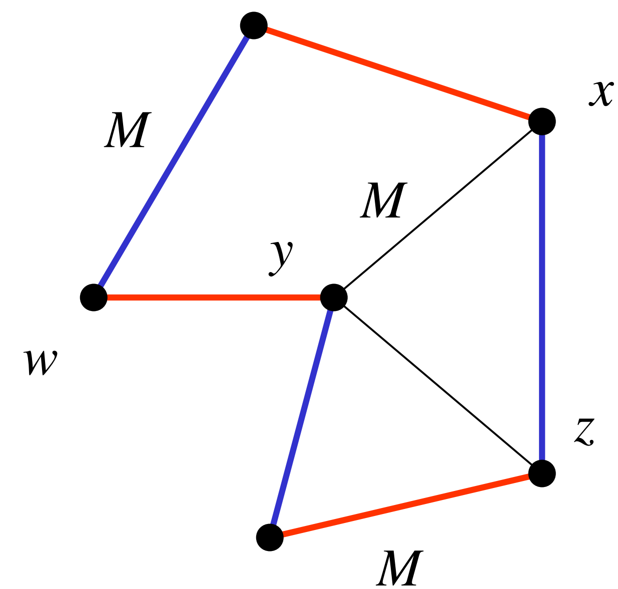


Twierdzenie Tutte

Dowód lematu c.d.:

- Rozważmy skojarzenie M_1 w grafie $F + \{x,z\}$ oraz skojarzenie M_2 w grafie $F + \{w,y\}$.
- **Przypadek 1:** W grafie $M_1 \cup M_2$ istnieje cykl obejmujący $\{y,w\}$ oraz $\{x,z\}$:
- Istnieje dokładne skojarzenie w grafie F. Na rysunku jego krawędzie są oznaczone etykietą M. Skojarzenie M „poza cyklem" jest równe dowolnemu spośród M_i.

  Sprzeczność.

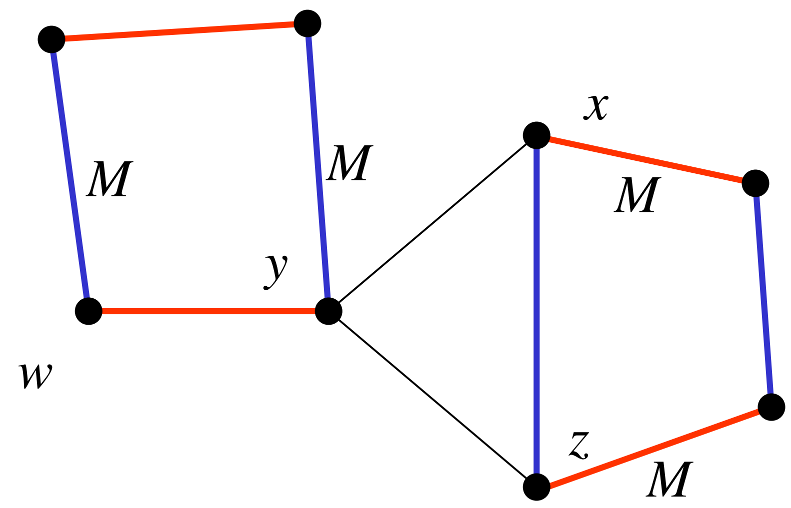


Twierdzenie Tutte

Dowód lematu c.d.:

- **Przypadek 2:** W grafie $M_1 \cup M_2$ krawędzie $\{y,w\}$ oraz $\{x,z\}$ należą do różnych cykli:
- Istnieje dokładne skojarzenie M w grafie F. Na rysunku jego krawędzie są oznaczone etykietą M. Skojarzenie M „poza cyklami" jest równe dowolnemu spośród M_i.

  Sprzeczność.



Dowód lematu jest zakończony.

Twierdzenie Tutte

Ciąg dalszy dowodu tw. Tutte: ($\Leftarrow$)

- Załóżmy, że $F - U$ ma k składowych spójności nieparzystego rzędu $H_1,\ldots,H_k$.
- Wiadomo, że k oraz $|U|$ są jednocześnie parzyste lub jednocześnie nieparzyste.
- Składowe spójności $F - U$ parzystego rzędu mają dokładne skojarzenia, ponieważ na podstawie lematu są one grafami pełnymi.
- W każdej składowej H_i wybieramy dowolny wierzchołek v_i i „kojarzymy" go z dowolnym wierzchołkiem w U.
- Powyższa operacja jest poprawna, ponieważ $o(F - S) \leq o(G - S) \leq |S|$ dla każdego *S, co o*znacza to, że $k \leq |U|$.
- Pozostałe wierzchołki w U można skojarzyć, gdyż tworzą graf pełny i ich liczba jest parzysta.
- Podobnie można skojarzyć wierzchołki w grafach $H_i - v_i$.
- Otrzymaliśmy więc dokładne skojarzenie w F – sprzeczność.

Algorytm

Tw. *Skojarzenie M jest najliczniejsze wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera drogi powiększającej względem M.*

Z twierdzenia wynika następujący algorytm:

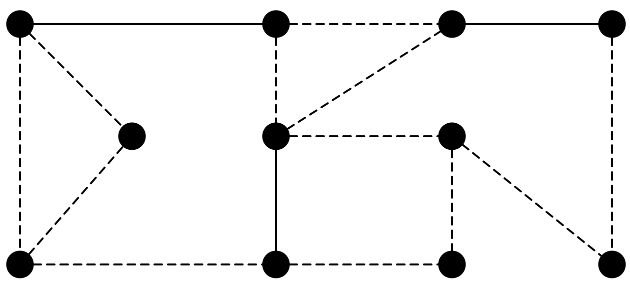
1. inicjalnie skojarzenie M nie zawiera żadnych krawędzi;
2. jeśli nie istnieje droga powiększająca względem M to „koniec”;
3. znajdź drogę powiększającą P;
4. $M := M \oplus P$;
5. przejdź do punktu 2;

Drzewo naprzemienne

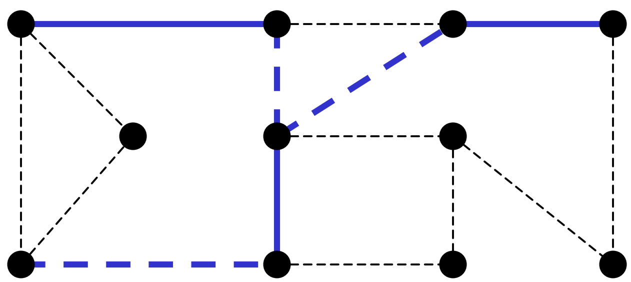
Def. Drzewo T będące podgrafem G jest *drzewem naprzemiennym* względem skojarzenia M jeśli:

- T zawiera dokładnie jeden wolny wierzchołek $r(T)$,
- dla każdego wierzchołka $v \in V(T)$ droga łącząca $r(T)$ z v jest naprzemienna względem skojarzenia M,
- dla każdego liścia v drzewa T (różnego od $r(T)$) krawędź należąca do skojarzenia M i incydentna do v w G należy do T.

Przykład.



Graf G i skojarzenie M



Pewne drzewo naprzemienne

Las naprzemienny

Def. *Las naprzemienny* F względem M w grafie G jest sumą drzew naprzemiennych takich, że:

- każdy wolny wierzchołek należy do pewnego drzewa będącego w F,
- drzewa należące do F są parami wierzchołkowo rozłączne.

Uwagi:

- jeśli $v \in V(F)$, to $F(v)$ oznacza drzewo naprzemienne należące do F, które zawiera wierzchołek v,
- $r(F(v))$ jest wówczas wierzchołkiem wolnym należącym do drzewa naprzemiennego w F zawierającego v,
- graf F zawierający wyłącznie wierzchołki wolne jest pewnym lasem naprzemiennym
- wierzchołek v jest *parzysty* (*nieparzysty*), jeśli droga łącząca v z $r(F(v))$ w drzewie $F(v)$ zawiera parzystą (nieparzystą) liczbę krawędzi. Zbiór parzystych (nieparzystych) wierzchołków oznaczać będziemy przez $even(F)$ ($odd(F)$).

Szukanie dróg powiększających

Szukanie drogi powiększającej w grafie dwudzielnym można opisać procedurą, składającą się z dwóch poniższych kroków, którą nazwijmy Grow:

1. Jeśli istnieje wierzchołek $u \in \mathit{even}(F)$, który jest sąsiedni do wierzchołka $v \notin \mathit{odd}(F)$, to zachodzi jeden z przypadków:
   a) jeśli $v \notin \mathit{even}(F)$, to do drzewa $F(u)$ dodaj krawędź $\{u,v\}$ oraz krawędź incydentną do v i należącą do skojarzenia M;
   b) jeśli $v \in \mathit{even}(F)$ – droga powiększająca została znaleziona (składa się z krawędzi $\{u,v\}$, ścieżki łączącej v z $T(v)$ i ścieżki łączącej u z $T(u)$) i procedura kończy działanie;
2. Jeśli nie istnieje wierzchołek $u \in \mathit{even}(F)$, który jest sąsiedni do wierzchołka $v \notin \mathit{odd}(F)$, to procedura Grow kończy działanie.

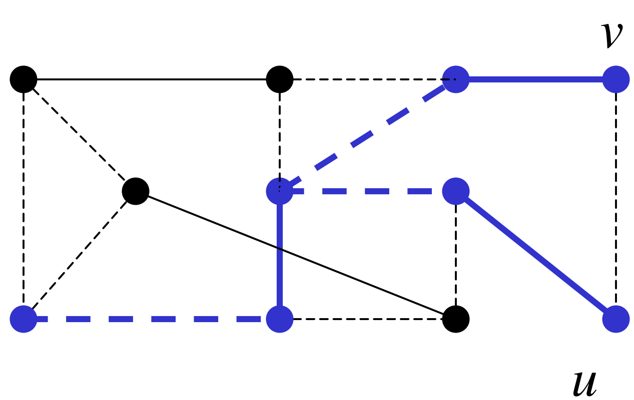
Uwagi:

- inicjalnie F to graf pusty zawierający wszystkie wierzchołki wolne,
- powyższe kroki są wykonywane „do skutku”.

Gdy graf nie jest dwudzielny...

Uwaga: Procedura szukania dróg powiększających podana poprzednio nie uwzględnia sytuacji, gdy $u \in even(F)$ oraz $v \in odd(F)$, co może się zdarzyć, gdy graf zawiera cykle o nieparzystej długości.

Przykład:



Uwaga: W powyższym przykładzie nadal jest możliwe rozszerzenie drzewa naprzemiennego, jednak można wskazać przykłady, gdy rozbudowa drzewa nie jest możliwe, mimo tego, że droga powiększająca istnieje.

Kielichy

Def. Cykl C nazywamy *naprzemiennym* względem skojarzenia M, jeśli $M \cap C$ jest najliczniejszym skojarzeniem w C.

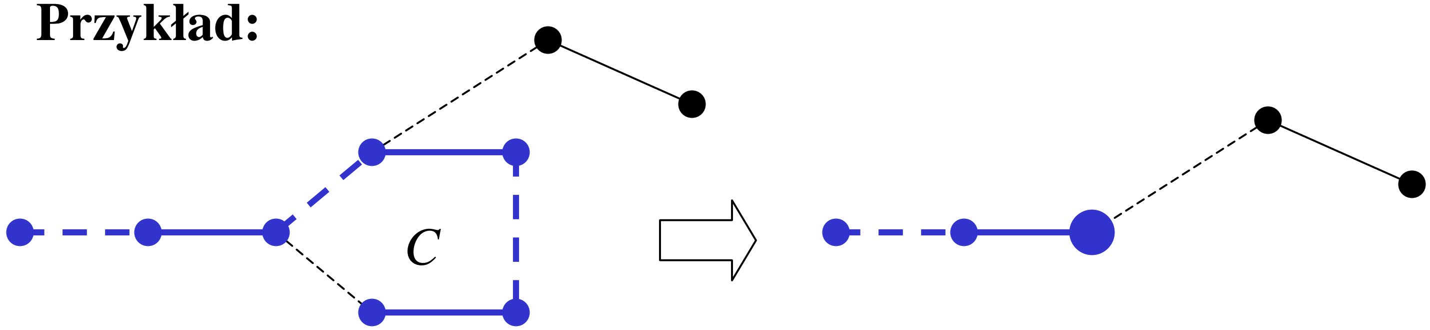
Uwaga: Jeśli C jest cyklem naprzemiennym o nieparzystej długości, to dokładnie jeden wierzchołek w C jest wolny względem skojarzenia $M \cap C$.

Def. Jeśli T jest drzewem naprzemiennym, które zawiera dwa wierzchołki grafu G, które są w G sąsiednie oraz oba są parzyste w lesie naprzemiennym zawierającym T, to cykl powstały w drzewie T poprzez dodanie krawędzi łączącej wspomniane dwa wierzchołki nazywamy *kielichem*. Ścieżkę (złożoną z krawędzi należących do T) łączącą korzeń T z kielichem nazywamy *łodygą*.

Ściąganie kielichów

Def. Jeśli C jest kielichem, to przez *ściągnięcie C* rozumiemy ściągnięcie wszystkich krawędzi należących do C. Tak otrzymany graf oznaczamy symbolem G_C.

Przykład:



Graf G z kielichem C

Graf G_C

Uwaga: *Jeśli F jest lasem naprzemiennym w G, to F_C jest lasem naprzemiennym w G_C..*

Ściąganie kielichów

Tw. *Niech M, F, C będą odpowiednio skojarzeniem, rodziną drzew naprzemiennych oraz kielichem w grafie G. Każda droga powiększająca w grafie G_C może być przekształcona w drogę powiększającą w G.*

Tw. *Jeśli M_C jest najliczniejszym skojarzeniem w G_C, to M jest najliczniejszym skojarzeniem w G.*

Wniosek *Jeśli $C_1,\dots,C_k$ są kielichami względem skojarzenia M w grafie G oraz $((M_{C_1})_{C_2}\dots)_{C_k}$ jest najliczniejszym skojarzeniem w $((G_{C_1})_{C_2}\dots)_{C_k}$, to M jest najliczniejszym skojarzeniem w G.*

Szukanie dróg powiększających

Aby rozszerzyć procedurę Grow na przypadek grafów dowolnych należy przewidzieć możliwość występowania kielichów.

1. Jeśli istnieje wierzchołek $u \in even(F)$, który jest sąsiedni do wierzchołka $v \notin odd(F)$, to zachodzi jeden z przypadków:
   a) jeśli $v \notin even(F)$, to do drzewa $F(u)$ dodaj krawędź $\{u,v\}$ oraz krawędź incydentną do v i należącą do skojarzenia M;
   b) jeśli $v \in even(F)$ oraz $F(u) \neq F(v)$ – droga powiększająca została znaleziona i procedura kończy działanie;
   c) jeśli $v \in even(F)$ oraz $F(u)=F(v)$ – kielich C został znaleziony; ściągamy C;
2. Jeśli nie istnieje wierzchołek $u \in even(F)$, który jest sąsiedni do wierzchołka $v \notin odd(F)$, to procedura Grow kończy działanie.

Grafy obciążone

- W dalszej części rozważamy pełne dwudzielne grafy obciążone, tzn. $G = (X \cup Y, E)$, $|X| = |Y|$; funkcja wagowa w: $E \to R_+$ jest taka, że $w(e) \geq 0$ dla każdej krawędzi $e \in E$,
- Rozwiązujemy problem polegający na znalezieniu dokładnego skojarzenia o maksymalnej sumie wag.

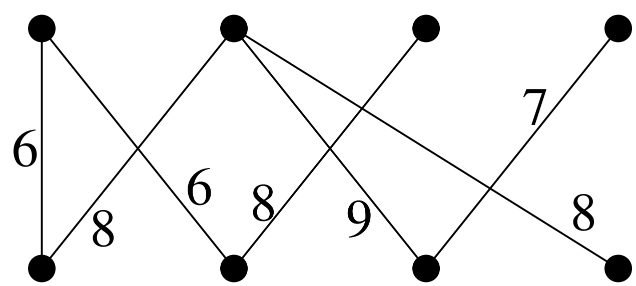
Uwagi:

- założenie, że wagi są nieujemne nie zmniejsza ogólności,
- rozważanie grafów pełnych dwudzielnych nie zmniejsza ogólności,
- możemy założyć, że partycje grafu mają jednakowe rozmiary,
- problem jest równoważny szukaniu dokładnego skojarzenia o minimalnej sumie wag,
- problem równoważny szukaniu skojarzenia (dowolnego) o maksymalnej (minimalnej) sumie wag,
- problem ogólniejszy od poprzedniego,

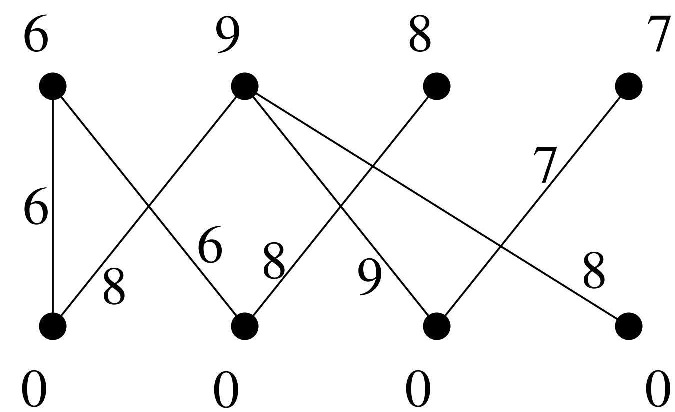
Etykietowanie wierzchołków

Def. Funkcja l: $V \to R_+$ jest *poprawna* jeśli $l(x) + l(y) \geq w(x,y)$.

Przykład:



Graf G (pozostałe krawędzie mają wagę 0)



Funkcja l.

$l(y) = 0$ dla $y \in Y$

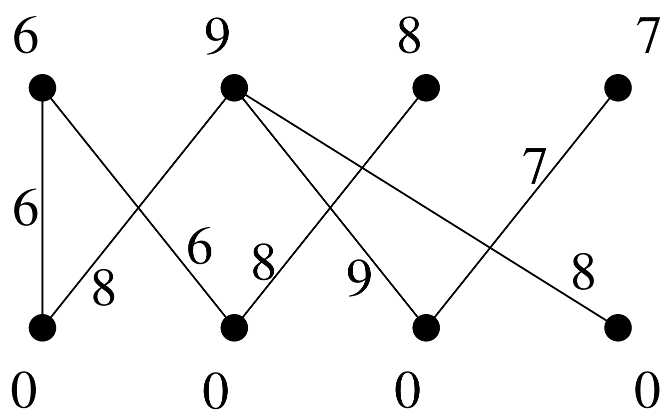
$l(x) = \max\{w(e) : x \in e\}$ dla $x \in X$.

Graf G_l

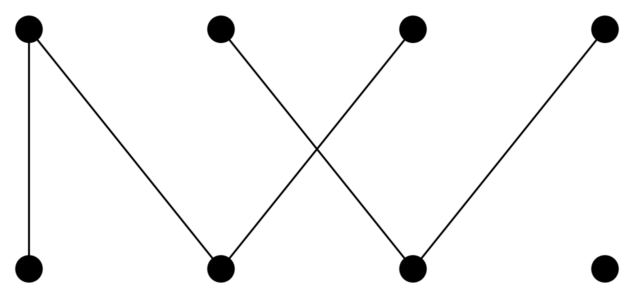
Def. Graf prosty G_l definiujemy następująco:

- $V(G_l) = V(G)$
- $\{x,y\} \in E(G_l)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $l(x) + l(y) = w(x,y)$

Przykład:



Graf G i funkcja l


Graf G_l

Skojarzenia w G_l i w G

Tw. *Jeśli M jest dokładnym skojarzeniem w grafie G_l, to M jest dokładnym skojarzeniem o maksymalnej sumie wag w G.*
Dowód:

$$\begin{aligned} w(M) &= \sum_{e\in M} w(e) = \sum_{\{x,y\}\in M} (l(x)+l(y)) \\ &= \sum_{\{v\in V:v \text{ jest skojarzony w } M\}} l(v) = \sum_{v\in V} l(v). \end{aligned}$$

Jeśli M' jest dowolnym dokładnym skojarzeniem w G, to:

$$\begin{aligned} w(M') &= \sum_{e\in M'} w(e) \le \sum_{\{x,y\}\in M'} (l(x)+l(y)) \\ &= \sum_{\{v\in V:v \text{ jest skojarzony w } M'\}} l(v) = \sum_{v\in V} l(v) = w(M). \end{aligned}$$

Skojarzenia w G_l i w G

Wniosek *Jeśli graf* G_l *posiada dokładne skojarzenie, to jest ono maksymalnym dokładnym skojarzeniem w G.*

Uwaga: Jeśli graf G_l nie posiada dokładnego skojarzenia, to zmierzamy do zmodyfikowania funkcji l w taki sposób, że:

- graf G_l otrzymuje dodatkowe krawędzie,
- krawędzie, które należały do G_l nie są z niego usuwane,
- funkcja l pozostaje poprawna.

Algorytm

1. Skonstruuj inicjalną funkcję wagową l:
   $l(y) = 0$ dla $y \in Y$
   $l(x) = \max\{w(e) : x \in e\}$ dla $x \in X$
2. utwórz graf G_l;
3. jeśli G_l posiada dokładne skojarzenie *M,* to jest ono szukanym maksymalnym skojarzeniem w G (na mocy wcześniejszego twierdzenia); w takim przypadku algorytm kończy działanie;
4. jeśli G_l nie posiada dokładnego skojarzenia, to popraw funkcję l;
5. wróć do punktu 2;

Poprawianie funkcji l

1. Inicjalizacja:
   - niech M będzie dowolnym najliczniejszym skojarzeniem w G_l;
   - niech $x \in X$ będzie wierzchołkiem wolnym w G_l względem M;
   - $S := \{x\}$; T – zbiór pusty;
2. Jeśli $N(S) = T$ w grafie G_l, to:
   - $$\alpha = \min\{l(x) + l(y) - w(x, y) : x \in S, y \in \overline{T}\}$$
   - $$l'(a) := \begin{cases} l(a) - \alpha & \text{gdy } a \in S \\ l(a) + \alpha & \text{gdy } a \in T \\ l(a) & \text{else} \end{cases}$$
   - utwórz graf $G_{l'}$;
3. Jeśli $N(S) \neq T$ w grafie G_l, to:
   - wybierz wierzchołek $y \notin T$, który należy do $N(S)$;
   - jeśli istnieje $z \notin S$, t.ż. $\{y,z\} \in M$, to $S := S \cup \{z\}$; $T := T \cup \{y\}$; wróć do kroku 2;
   - w przeciwnym wypadku KONIEC;