

# Diagramy Voronoi

# Definicje i oznaczenia

- dany jest zbiór punktów  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ ,
- rozważamy metrykę euklidesową  $d$  w  $\mathbb{R}^2$ ,
- definiujemy *diagram Voronoi* jako podział płaszczyzny  $\mathbb{R}^2$  na  $n$  takich obszarów, że dowolny punkt płaszczyzny  $p$  należy do obszaru odpowiadającego punktowi  $p_i$  wtedy i tylko wtedy  $d(p, p_i) < d(p, p_j)$  dla każdego  $j \neq i$ .
- obszar odpowiadający punktowi  $p_i$  oznaczamy  $V(p_i)$ ,
- diagram Voronoi dla  $P$  oznaczamy  $\text{Vor}(P)$ ,
- dla dwóch punktów  $p$  i  $q$  przez  $h(p, q)$  oznaczmy półpłaszczyznę zawierającą punkty znajdujące się bliżej punktu  $p$  niż  $q$ ,
- dla dwóch punktów  $p$  i  $q$  przez  $pq$  oznaczmy prostą wyznaczającą podział płaszczyzny na obszary  $h(p, q)$  i  $h(q, p)$ ,
- mówimy, że diagram  $\text{Vor}(P)$  jest *spójny*, gdy krzywa  $\mathbb{R}^2 \setminus (V(p_1) \cup \dots \cup V(p_n))$  jest spójna,
- *krawędzie* i *wierzchołki* diagramu  $\text{Vor}(P)$  to odpowiednio jego odcinki (proste, półproste) oraz punkty połączeń odcinków

# Własności

**Lemat** Dla każdego  $i=1,\dots,n$ ,  $V(p_i) = \bigcap_{j=1,\dots,n, j \neq i} h(p_i, p_j)$

**Tw.** Niech będzie dany zbiór  $P$ . Jeśli wszystkie punkty w  $P$  są współliniowe, to  $\text{Vor}(P)$  zawiera  $n - 1$  równoległych prostych. W przeciwnym wypadku diagram jest spójny i jego krawędzie to odcinki i półproste.

**Dowód:**

- zakładamy, że punkty w  $P$  nie są współliniowe,
- wiemy, że krawędzie  $\text{Vor}(P)$ , to części prostych  $p_i p_j$ ,
- przypuśćmy, że pewna krawędź  $e = p_i p_j$  (jest prosta),
- istnieje inny punkt  $p_k$ , który nie jest współliniowy z  $p_i$  i  $p_j$ ,
- stąd  $p_i p_k$  nie jest równoległy do  $e$ , więc proste się przecinają – sprzeczność,
- dowodzimy, że  $\text{Vor}(P)$  jest spójny,
- gdyby tak nie było, to istnieje obszar  $V(p_i)$  dzielący płaszczyznę,
- obszary diagramu Voronoi są wypukłe, co oznacza, że  $V(p_i)$  jest ograniczony przez dwie proste – sprzeczność

# Liczba krawędzi i wierzchołków

**Tw.** *Niech  $n > 2$  będzie liczbą punktów diagramu Voronoi. Liczba wierzchołków diagramu wynosi co najwyżej  $2n - 5$ , natomiast liczba jego krawędzi jest ograniczona przez  $3n - 6$ .*

## **Dowód:**

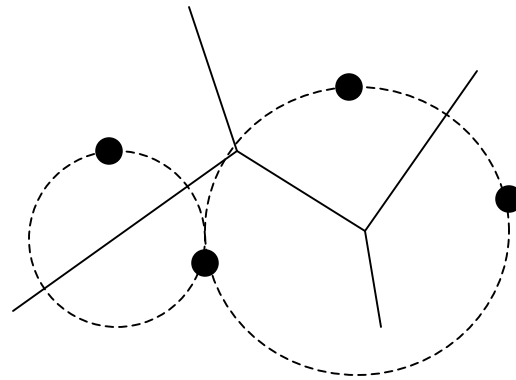
- możemy założyć, że punkty w  $P$  nie są współliniowe,
- szukane liczby wierzchołków oraz krawędzi diagramu oznaczmy odpowiednio symbolami  $n_p$  i  $m_p$ ,
- na podstawie  $\text{Vor}(P)$  utwórzmy graf  $G$ , którego wierzchołki odpowiadają wierzchołkom diagramu. Graf  $G$  zawiera dodatkowy wierzchołek  $v_\infty$ . Jeśli krawędź diagramu jest odcinkiem łączącym  $u, v$  to dodajemy krawędź  $\{u, v\}$  w  $G$ . Jeśli krawędź jest półprostą incydentną do  $u$ , to dodajemy krawędź  $\{u, v_\infty\}$  w  $G$ ,
- z twierdzenia Eulera mamy  $(n_p + 1) - m_p + n = 2$ ,
- każdy wierzchołek w  $G$  ma stopień równy co najmniej 3, co oznacza, że  $2m_p \geq 3(n_p + 1)$ , skąd wynika teza.

# Własności

**Def.** Niech  $q \in \mathbb{R}^2$ . Największe koło o środku w  $q$ , które nie zawiera wewnątrz żadnego punktu  $p_i$  oznaczane będzie symbolem  $C_p(q)$ .

**Tw.** Dla danego zbioru  $P$  zachodzi:

1. punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  jest wierzchołkiem w  $\text{Vor}(P)$  wtedy i tylko wtedy gdy brzeg koła  $C_p(q)$  zawiera co najmniej trzy punkty w  $P$ ;
2. fragment prostej  $p_i p_j$  zawiera krawędź  $\text{Vor}(P)$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt  $q \in \mathbb{R}^2$  taki, że brzeg  $C_p(q)$  zawiera 2 punkty  $p_i$  i  $p_j$



# Własności

## Dowód:

1. - jeśli brzeg  $C_P(q)$  zawiera  $p_i, p_j, p_k$ , to (ponieważ  $C_P(q)$  jest puste) punkt  $q$  musi należeć do granicy każdego obszaru  $V(p_i)$ ,  $V(p_j)$ ,  $V(p_k)$ ;
  - odwrotnie, jeśli  $q$  jest indydentny do co najmniej 3 krawędzi w  $\text{Vor}(P)$ , to jest indydentny do co najmniej 3 obszarów  $V(p_i)$ ,  $V(p_j)$ ,  $V(p_k)$ ;  $q$  jest równoodległy od  $p_i, p_j, p_k$  oraz nie może istnieć żaden punkt z  $P$ , który należy do  $C_P(q)$ ;
2. - założmy, że istnieje  $q \in \mathbb{R}^2$  taki, że brzeg  $C_P(q)$  zawiera dokładnie 2 punkty  $p_i$  i  $p_j$ . Wówczas  $d(q, p_i) = d(q, p_j) \leq d(p_i, p_j)$ . Wykazaliśmy wcześniej, że  $q$  nie jest wierzchołkiem w  $\text{Vor}(P)$ ;
  - odwrotnie, jeśli fragment prostej  $p_i p_j$  jest krawędzią w  $\text{Vor}(P)$ , to  $C_P(q)$  zawiera  $p_i$  oraz  $p_j$  i nie może zawierać żadnych innych punktów.

# Algorytm

Obszar zawierający punkt  $p_i$  można wyznaczyć następująco:

- dla każdego innego punktu  $p_j$  wyznaczamy prostą rozdzielającą płaszczyznę na dwa obszary: zawierający punkty leżące bliżej  $p_i$  niż  $p_j$  oraz obszar zawierający punkty leżące bliżej  $p_j$  niż  $p_i$ .
- obliczając przekrój wszystkich powyższych półpłaszczyzn znajdujemy obszar  $V(p_i)$

## Uwagi:

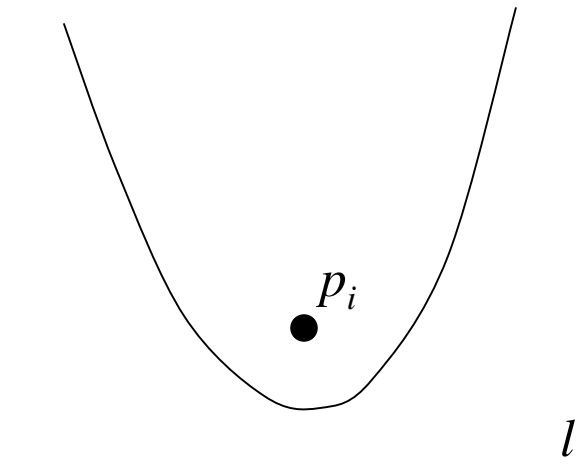
- powyższy algorytm można zaimplementować w czasie  $O(n^2 \log n)$ ,
- istnieje algorytm o złożoności  $O(n \log n)$ , którego szkic przedstawiony jest dalej,
- $O(n \log n)$  jest dolną granicą, gdyż sortowanie  $n$  liczb rzeczywistych można zredukować do szukania diagramu Voronoi o  $n$  punktach

# Szkic algorytmu $O(n \log n)$

- definiujemy poziomą prostą  $l$ ,
- początkowo  $l$  znajduje się powyżej wszystkich punktów  $p_i$ ,
- prosta  $l$  jest przesuwana ku dołowi,
- diagram jest wyznaczany na podstawie punktów znajdujących się powyżej prostej  $l$ ,
- przesuwanie prostej odbywa się w sposób dyskretny, tzn. potencjalne nowe użyteczne informacje mogą się pojawiać tylko dla określonych współrzędnych  $y$  prostej  $l$ ,
- nowy wierzchołek jest dodawany do diagramu, gdy należy on do diagramu niezależnie od położenia punktów znajdujących się poniżej prostej,

# Algorytm

- przez  $l^+$  oznaczmy półpłaszczyznę znajdującą się ponad prostą  $l$ ,
- część diagramu Voronoi, która nie ulegnie zmianie podczas dalszego przesuwania  $l$ , to te punkty płaszczyzny, które znajdują się bliżej pewnego punktu  $p_i \in l^+$  niż prostej  $l$ ,
- granica oddzielająca punkty znajdujące się bliżej  $p_i$  niż  $l$  jest wyznaczona przez parabolę



# Algorytm

**Def.** Parabole wyznaczoną przez punkt  $p_i$  oznaczmy symbolem  $b_i$ .  
Definiujemy funkcję  $B(x) = \min\{b_i(x) : p_i \text{ znajduje się powyżej } l\}$ .

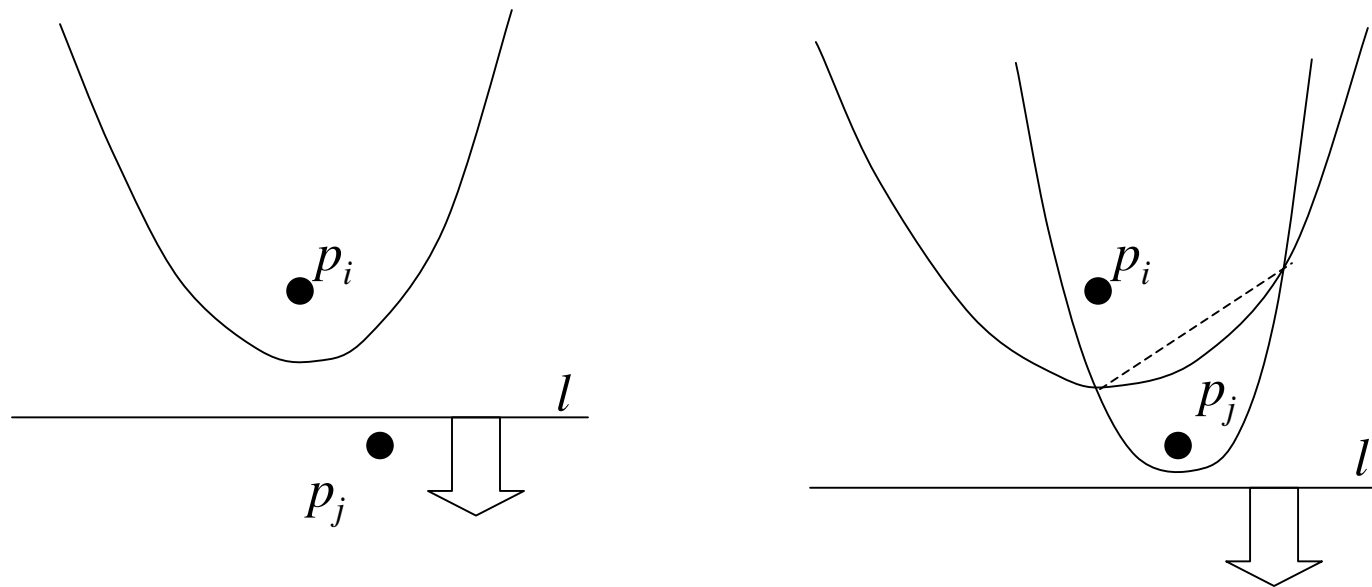
**Uwaga:** Punkty wspólne parabol  $b_i, b_j$  należące do  $B$  leżą w jednakowej odległości od  $p_i$  i  $p_j$ , co oznacza, że określają krawędź diagramu Voronoi.

**Uwaga:** Funkcja  $B$  zmienia się w sposób ciągły, lecz nas interesuje jej kombinatoryczna struktura, więc interesujące są dwie sytuacje:

- nowy paraboliczny łuk pojawia się w  $B$ ,
- pewna parabola  $b_i$  przestaje mieć punkty wspólne z  $B$ .

# Nowy łuk

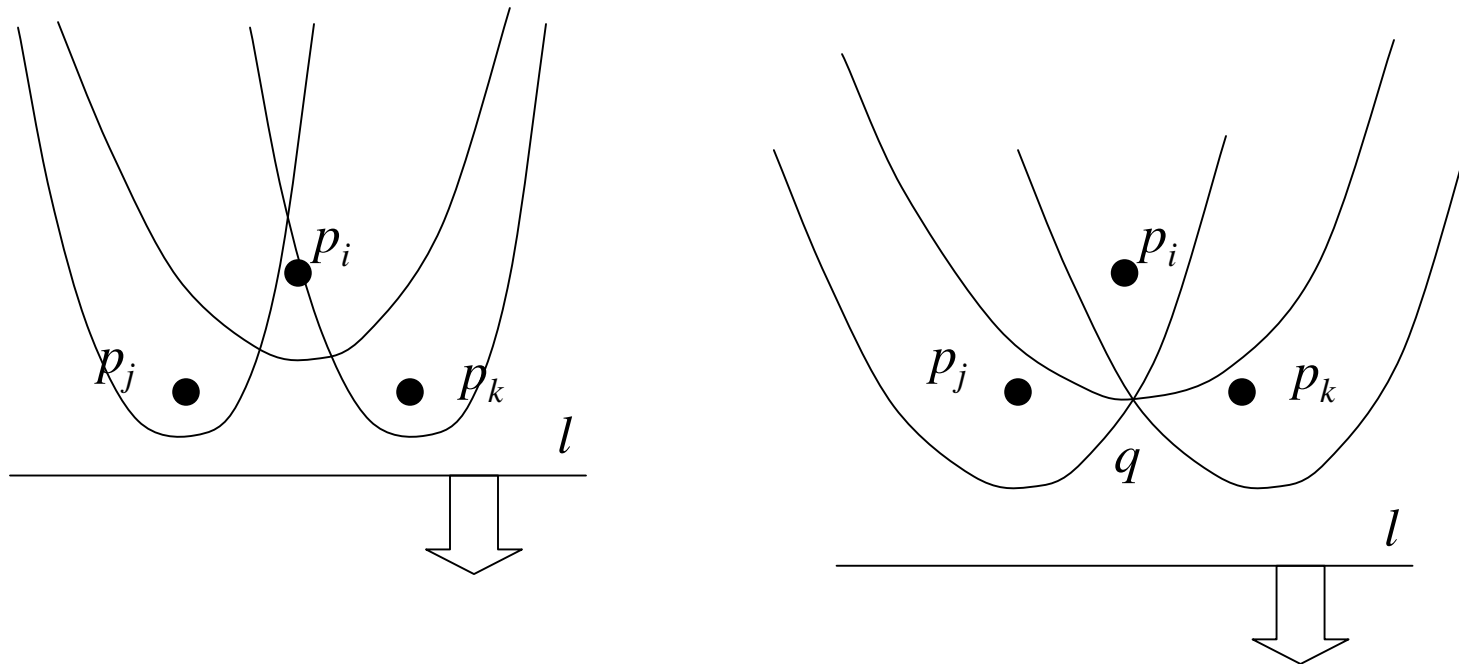
**Uwaga** Jedyna sytuacja, w której nowy paraboliczny łuk staje się fragmentem  $B$  to taka, gdy nowy punkt  $p_i$  zostaje napotkany przez prostą  $l$ . Wówczas punkty wspólne odpowiednich parabol wykreślają krawędź diagramu, gdy  $l$  jest przesuwana.



**Wniosek**  $B$  zawiera co najwyżej  $2n - 1$  parabolicznych łuków.

# Zanik łuku

**Uwaga** Druga sytuacja, gdy struktura  $B$  się zmienia występuje wówczas, gdy pewien paraboliczny łuk przestaje być częścią  $B$ . Punkt  $q$ , który jest zdegenerowanym takim łukiem wyznacza wierzchołek diagramu.



# Reprezentacja $B$

- interesuje nas możliwość szybkiego wyszukiwania paraboli  $b_i$  stanowiącej fragment  $B$  i zawierającej punkt o wybranej współrzędnej  $x$ ,
- krzywą  $B$  reprezentujemy za pomocą zrównoważonego drzewa binarnego  $T$ :
  - liść w  $T$  przechowuje punkt  $p_i$ , który definiuje parabolę reprezentowaną przez ten liść
  - węzeł wewnętrzny przechowuje punkt połączenia fragmentów parabol, zapisany w postaci  $(p_i, p_j)$
- wówczas w czasie  $O(\log n)$  możemy znaleźć parabolę  $b_i$ , której fragment należy do  $B$  i znajduje się bezpośrednio nad punktem o ustalonej współrzędnej  $x$  i należącym do  $l$ : wystarczy trawersować drzewo następująco:
  - jeśli wewnętrznym węzłem jest  $(p_i, p_j)$ , to na podstawie współrzędnych  $p_i, p_j$  oraz położenia  $l$  możemy obliczyć punkt połączenia parabol zdefiniowanych przez  $p_i, p_j$ . Jeśli wsp.  $x$  jest mniejsza od wyznaczonego punktu, to schodzimy do lewego poddrzewa, w przeciwnym wypadku do prawego.

# Uwagi końcowe

- podczas realizacji przechowywana jest kolejka zdarzeń  $Q$ ,
- elementy  $Q$  są posortowane względem współrzędnych  $y$  pojawiania się odpowiednich zdarzeń,
- kolejka  $Q$  zawiera dwa opisane wcześniej typy zdarzeń:
  - pojawienie się nowego punktu  $p_i$  na prostej  $l$ , co oznacza utworzenie nowego łuku paraboli; te zdarzenia i ich kolejność pojawiania się można wyznaczyć w fazie inicjalizacji algorytmu
  - zanikanie łuku, co oznacza utworzenie nowego wierzchołka diagramu; te zdarzenia są dodawane do kolejki podczas działania algorytmu,

**Uwaga:** Czas działania algorytmu to  $O(n \log n)$ .